

## EXERCICES SUR LE CHAPITRE 1 : « MIXTE »

---

1. Les électeurs d'une grande ville américaine sont constitués de 40% de blancs, 40% de noirs et 20% d'hispaniques. Un candidat noir à la fonction de Maire espère attirer 30% des votes chez les blancs, 90% chez les noirs et 50% chez les hispaniques. Quel pourcentage des votes globaux espère-t-il donc réunir?
2. Lors du lancer d'un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, quelle est la probabilité d'obtenir :
  - a. le nombre quatre ?
  - b. le nombre cinq ?
  - c. un nombre pair ?
  - d. un nombre impair ?
  - e. un nombre inférieur ou égal à 2 ?
  - f. un nombre supérieur ou égal à 2 ?
  - g. le nombre 6 sachant que le lancer précédent a donné 6 ?
  - h. le nombre 6 sachant que les dix lancers précédents ont donné 6 ?
3. Nadine part à la cueillette de champignons. Elle ne sait pas faire la différence entre un champignon comestible et un toxique. On estime que la proportion de champignons toxiques se trouvant dans les bois s'élève à 0.7. Nadine ramasse 6 champignons au hasard.
  - a. Quelle est la probabilité qu'elle ramasse exactement 4 champignons toxiques ?

Nadine invite Serge à une cueillette. Serge connaît bien les champignons parce que son papa est restaurateur et qu'ils vont souvent en chercher ensemble pour le restaurant. On peut estimer que sur 10 champignons ramassés par Serge, 9 sont comestibles. Ce jour-là, Serge ramasse 5 champignons.
  - b. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous comestibles ?

Un autre jour, Serge accompagne son papa à la cueillette. Pour les besoins du menu du soir, ils doivent cueillir 120 champignons. Sous l'œil avisé de son papa, Serge ne ramasse maintenant plus que 1 champignon toxique sur 20 cueillis.
  - c. A l'aide d'une approximation adéquate, calculez la probabilité que le nombre de champignons toxiques cueillis soit inférieur ou égal à 1.
4. La distribution de la couleur des cheveux en Europe est :

Couleur des cheveux	Blond	Roux	Châtain	Noir
Probabilité	0.27	0.08	0.41	?

- a. Quelle est la probabilité d'avoir des cheveux noirs ?
- b. Quelle est la probabilité qu'un européen pris au hasard soit blond ou châtain ?
- c. Quelle est la probabilité que deux européens choisis indépendamment et au hasard aient la même couleur de cheveux et soient tous les deux soit blond soit châtain ?

- d. Quelle est la probabilité que deux européens choisis indépendamment et au hasard soient tous les deux soit blond soit châtain ?
- e. Si Nathalie a les cheveux blond, quelle est la probabilité que son mari, David ait les cheveux roux ?

La distribution de la couleur des cheveux en Asie est :

Couleur des cheveux	Blond	Roux	Châtain	Noir
Probabilité	0.05	0.01	0.17	0.77

Si un européen et un asiatique sont choisis indépendamment et au hasard,

- f. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux noirs de cheveux ?
  - g. Quelle est la probabilité qu'ils aient la même couleur de cheveux ?
  - h. Quelle est la probabilité qu'ils n'aient pas la même couleur de cheveux ?
5. Les cotes obtenues lors d'un examen de mathématique sont distribuées normalement avec  $\mu = 12$  et  $\sigma = 3,5$ .
    - a. Quelle est la moyenne des cotes obtenues ? Quelle est sa variance ?
    - b. Quelle est la probabilité de réussite de cet examen (cote supérieure ou égale à 10) ?
    - c. Quelle cote doit être considérée comme cote d'exclusion pour avoir un taux d'échec inférieur à 25% ?
  6. Un recensement de la population américaine révèle la répartition suivante des femmes adultes (en milliers):

	Age (en années)			Total
	18-29	30-64	≥65	
Mariée	7842	43808	8270	59920
Jamais mariée	13930	7184	751	21865
Veuve	36	2523	8385	10944
Divorcée	704	9174	1263	11141
Total	22512	62689	18669	103870

Supposons qu'une américaine adulte soit choisie au hasard.

- a. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 30 ans?
  - b. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 30 ans et soit mariée?
  - c. Sachant qu'elle a moins de 30 ans, quelle est la probabilité qu'elle soit mariée?
  - d. Sachant qu'elle est mariée, quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 30 ans?
7. Le Sultan dit à Ali Baba : "Voici 2 urnes, 4 boules blanches et 4 noires. Répartis les boules dans les urnes comme tu le souhaites, mais ensuite, je les rendrai indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche hors d'une des 2 urnes."
    - a. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 4 boules blanches dans la première urne et les 4 noires dans la seconde ?
    - b. Idem avec deux boules blanches et deux boules noires dans chaque urne.
    - c. Idem avec 3 boules blanches dans la première urne et les autres dans la seconde.
    - d. Comment Ali Baba peut-il maximiser ses chances de survie ?

8. La durée d'une grossesse chez l'humain suit approximativement une distribution normale de moyenne égale à 266 jours et d'écart-type égal à 16 jours. Déterminez, à l'aide d'une table appropriée :
- Le pourcentage de grossesses de moins de 240 jours (càd 8 mois).
  - Le pourcentage de grossesses d'une durée comprise entre 240 et 270 jours (càd entre 8 et 9 mois).
  - La durée minimale des 20% de grossesses les plus longues.
9. Une compagnie d'assurances constate que chaque année 0.004% de ses assurés meurent à la suite d'une certaine maladie. Quelle est la probabilité pour que la compagnie :
- N'ait pas de sinistre à payer ?
  - Doive payer plus de deux risques assurés, si elle gère 100 000 dossiers au cours d'une année ?
10. Considérons une urne contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 euros pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1 euro pour chaque boule blanche tirée. On choisit une boule au hasard. Désignons les gains nets par  $X$ .
- Quelle est la distribution de la variable aléatoire  $X$  ?
  - Que valent la moyenne et la variance de  $X$  ?
  - Quelle est la distribution de la variable aléatoire  $W$  désignant les gains nets lors du tirage de 2 boules de l'urne ?
  - Que valent la moyenne et la variance de  $W$  ?
  - Que deviennent les points c et d si on considère un tirage avec remise ?
11. Sur l'E42, on observe en moyenne 2 accidents par quart d'heure en pleine heure de pointe.
- Quelle est la probabilité de n'observer aucun accident en un quart d'heure ?
  - Quelle est la probabilité d'observer plus de 3 accidents en un quart d'heure ?
  - Quelle est la probabilité de n'observer aucun accident en une heure ?
  - Quelle est la probabilité d'observer 4 accidents en une heure ?
12. Une manufacture emploie 100 ouvriers, dont les  $\frac{3}{4}$  ont plus de 30 ans, les  $\frac{2}{5}$  sont célibataires et les  $\frac{4}{5}$  sont syndiqués. On sait en outre que :
- parmi les ouvriers de moins de 30 ans, 40% sont célibataires.
  - parmi les ouvriers célibataires, la proportion de syndiqués est de  $\frac{3}{4}$ .
- Quelle est la probabilité qu'un ouvrier pris au hasard soit célibataire ou syndiqué ?
  - Quelle est la probabilité qu'un ouvrier pris au hasard soit célibataire sachant qu'il est syndiqué. ?
  - Quelle est la probabilité qu'il soit célibataire et âgé de plus de 30 ans ?
13. En supposant que  $Z \sim N(0,1)$ , trouver la valeur de  $z$  telle que :
- $z$  corresponde au quantile 2.5% de la normale  $N(0; 1)$
  - $z$  corresponde au quantile 25% de la normale  $N(0; 1)$
  - $z$  corresponde au quantile 50% de la normale  $N(0; 1)$
  - $z$  corresponde au quantile 75% de la normale  $N(0; 1)$
  - $z$  corresponde au quantile 97.5% de la normale  $N(0; 1)$

14. On estime que, dans une région africaine, les séropositifs représentent 20% de la population. Un nouveau test de dépistage du sida est utilisé et possède les caractéristiques suivantes: pour une personne saine, il donne une réponse négative dans 95% des cas et pour une personne infectée, il donne une réponse positive dans 99% des cas.
- Un individu se présente au dépistage et la réponse du test est négative: quelle est la probabilité que cette personne ne soit pas contaminée?
  - Un individu se présente au dépistage et la réponse du test est positive: quelle est la probabilité que cette personne soit séropositive?
15. Vous disposez de 2 dés équilibrés. Le premier présente sur ses faces les valeurs 1, 3, 4, 5, 6 et 8. Le deuxième présente les valeurs 1, 2, 2, 3, 3 et 4.
- Quelle est la distribution de probabilité pour le résultat du 1er dé? Même question pour le 2ème dé. En déduire la moyenne du résultat obtenu pour un lancer pour chacun des dés
  - Quelle est la distribution de probabilité de la somme des résultats obtenus par les lancers simultanés des 2 dés?
  - Que vaut la moyenne de la somme des résultats obtenus par les lancers simultanés des 2 dés? Trouvez la réponse par 2 méthodes: 1: en exploitant le fait que le total est la somme de 2 variables aléatoires (indépendantes) ; 2: en utilisant la distribution de probabilité obtenue en b.
16. Une usine fabrique en grand nombre des billes dont le diamètre suit une loi normale de moyenne 100mm et d'écart-type 2mm.
- Quelle est la probabilité pour une bille quelconque d'avoir un diamètre compris entre 95 et 105mm ?
  - Trouvez l'intervalle centré autour de la moyenne du diamètre qui contient 80% de la production.
  - Un premier contrôle permet de répartir la population en 2 lots :  
 $L_1$  : ensemble des billes de diamètres dans l'intervalle [95 ; 105]  
 $L_2$  : ensemble des billes restantes.  
 Quelle est la probabilité qu'une bille ait son diamètre compris entre 95 et 102
    - Quand elle appartient à  $L_1$  ?
    - Quand elle appartient à  $L_2$  ?
17. Une compagnie d'assurance propose à ses clients un nouveau contrat annuel destiné à les couvrir en cas de vol dans leur résidence secondaire. Sur base d'une étude statistique, la compagnie estime que six résidences secondaires sur 100 sont cambriolées au moins une fois par an et que la valeur des biens volés dépasse 2500 euros une fois sur 5.
- Supposons que 10 clients prennent l'assurance proposée.
- Quelle est la probabilité que la compagnie ne doive pas intervenir ?
  - Quelle est la probabilité qu'elle doive intervenir pour deux clients ?
  - Quelle est la probabilité qu'elle doive intervenir pour deux clients au moins ?
- Supposons que 1000 clients prennent l'assurance proposée.

- d. Donnez une prévision du nombre de clients qui bénéficieront de l'intervention de l'assurance.
  - e. A l'aide d'une approximation adéquate, calculer la probabilité que l'assurance doive intervenir pour 50 clients au moins.
  - f. A l'aide d'une approximation adéquate, calculer la probabilité que l'assurance doive intervenir pour plus de 2500 euros pour 6 clients au plus.
  - g. Dans quel intervalle centré sur la moyenne pourrait-on trouver, avec une certitude de 90%, le nombre d'intervention de l'assurance ?
18. En supposant que  $Z \sim N(0,1)$ , calculer à l'aide de la table appropriée :
- a.  $P(Z < 1,5)$
  - b.  $P(Z < -2,85)$
  - c.  $P(Z > 1,8)$
  - d.  $P(Z > -2,1)$
19. Différentes compagnies aériennes ont recensé le nombre de passagers réservant un vol mais n'y embarquant finalement pas. Sur un total de 2648640 passagers, ce nombre s'élevait à 132432. A la suite de cette étude, SA Airlines vend toujours 94 billets pour ses avions de 90 sièges.
- a. Quelle est la proportion  $p$  de passagers réservant un vol mais n'y embarquant finalement pas ?
  - b. Donner la distribution du nombre de ces passagers pour la compagnie SA Airlines.
  - c. Que valent la moyenne et la variance de cette variable aléatoire ?
  - d. Quelle est la probabilité que deux passagers exactement doivent rester à l'aéroport (faute de place dans l'avion) ?
  - e. Quelle est la probabilité que l'avion sans plein sans devoir laisser des gens à l'aéroport ?
  - f. Quelle est la probabilité qu'un passager ne puisse pas embarquer sur le vol ?
20. Sachant que la taille, en centimètres, d'un pygmée âgé de 25 ans est une variable aléatoire suivant une distribution normale de moyenne 140 cm et d'écart-type 6 cm, calculer :
- a. La probabilité qu'un pygmée de 25 ans ait une taille supérieure à 150 cm.
  - b. La probabilité qu'un pygmée de 25 ans ait une taille comprise entre 135 et 140 cm.
  - c. Parmi les pygmées de 25 ans mesurant plus de 145 cm, quel pourcentage dépasse 150cm ?
  - d. Donner les limites de l'intervalle centré sur la moyenne qui comprend 80% des pygmées de 25 ans.