

Exercices supplémentaires sur l'introduction générale
à la notion de probabilité
2009-2010

Exercices fortement conseillés : 6, 10 et 14

- 1) Un groupe d'étudiants est formé de 20 étudiants de première année (10 filles et 10 garçons) et de 30 étudiants de deuxième année (18 filles et 12 garçons). On choisit au hasard une personne dans ce groupe. Déterminer la plausibilité qu'elle soit :
- (a) de première année. (rép :0.4)
 - (b) un garçon. (rép :0.44)
 - (c) une fille de deuxième année. (rép :0.36)
- 2) On lance deux dés (non truqués) et on représente le résultat de cette épreuve aléatoire par un couple (X,Y) où X est le résultat du lancer du premier dé et Y celui du second dé. Quelle est la plausibilité:
- (a) d'obtenir un double 6 ? (rép :0.0278)
 - (b) de ne pas obtenir un double ? (rép :0.8333)
 - (c) d'obtenir un résultat dont la somme vaut 11 ? (rép :0.0556)
 - (d) d'obtenir un résultat dont la somme vaut 8 ? (rép :0.1389)
 - (e) d'obtenir un résultat dont la somme vaut au moins 8 ? (rép :0.4167)
 - (f) d'obtenir un résultat dont la somme vaut au plus 8 ? (rép :0.7222)
 - (g) d'obtenir un résultat dont la somme vaut plus de 8 ? (rép :0.2778)
- Sur quelle valeur de la somme est-il le plus intéressant de parier ? Pourquoi ?
- 3) La distribution de la couleur des cheveux en Europe est la suivante :

<i>Couleur des cheveux</i>	<i>Blond</i>	<i>Roux</i>	<i>Châtain</i>	Noir
Probabilité	0,27	0,08	0,41	?

- (a) Que vaut la probabilité d'avoir des cheveux noirs? (rép :0.24)
 - (b) Quelle est la probabilité qu'un européen pris au hasard soit blond ou châtain ? (rép : 0.68)
 - (c) Quelle est la probabilité que deux européens choisis indépendamment et au hasard aient tous deux une couleur de cheveux parmi blond ou châtain ? (rép :0.4624)
 - (d) Si Nathalie a les cheveux blonds, quelle est la probabilité que son mari David ait les cheveux roux? (rép :0.08)
- 4) La distribution de la couleur des cheveux en Asie est la suivante :

<i>Couleur des cheveux</i>	<i>Blond</i>	<i>Roux</i>	<i>Châtain</i>	Noir
Probabilité	0,05	0,01	0,17	0,77

Si un européen et un asiatique sont choisis indépendamment et au hasard.

- (a) Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux noirs de cheveux? (rép :0.1848)
- (b) Quelle est la probabilité qu'ils aient la même couleur de cheveux ? (rép :0.2688)
- (c) Quelle est la probabilité qu'ils n'aient pas la même couleur de cheveux ? (rép :0.7312)

- 5) Un service météorologique a établi qu'au cours d'une journée d'avril, il pleut avec une probabilité 0.35 et il neige avec une probabilité de 0.08. D'autre part, il y a une température supérieure ou égale à 20 degrés avec une probabilité de 0.52. Il y a de la pluie et une température inférieure à 20 degrés avec une probabilité 0.2. La pluie et la neige sont des événements incompatibles, de même que la neige et une température supérieure ou égale à 20 degrés. Quelle est la probabilité que lors d'une journée d'avril :
- il pleuve ou il neige ? (rép :0.43)
 - il n'y ait ni pluie ni neige ? (rép : 0.57)
 - il y ait de la neige et une température inférieure à 20 degrés ? (rép :0.08)
 - il pleuve ou la température soit inférieure à 20 degrés ? (rép :0.63)
- 6) Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A, B, AB et O. Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur *Rhésus*. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit *Rhésus positif* (noté *Rh+*) et s'il ne possède pas ce facteur, il est dit *Rhésus négatif* (noté *Rh-*). Dans une certaine population P, on sait que 40% des individus ont un groupe sanguin A, 10% ont un groupe sanguin B, 5% ont un groupe sanguin AB et 45% ont un groupe sanguin O. Pour chaque groupe sanguin, la proportion d'individus possédant ou non le facteur *Rhésus* se répartit comme suit :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de *Rhésus négatif* est appelé *donneur universel*. On choisit un individu au hasard dans la population P. Calculer la probabilité des événements suivants :

- L'individu a un sang de groupe O. (rép :0.45)
 - L'individu est un donneur universel. (rép :0.09)
 - L'individu a un sang de Rhésus négatif. (rép :0.1895)
 - Si l'individu choisit a du sang de Rhésus négatif, quelle est la probabilité que cet individu soit du groupe O ? (rép :0.4749)
- 7) Une compagnie démarcher ses acheteurs par téléphone. Elle choisit ses correspondants au hasard dans le bottin. L'expérience montre que 70% des appels n'aboutissent pas (pas de réponse ou refus de parler), 20% conduisent à une interlocutrice et 10% à un interlocuteur. Sachant que 30% des femmes et 20% des hommes engageant la discussion finissent par acheter quelque chose, quel est le pourcentage d'appels conduisant à une vente ? (rép :0.08)
- 8) Supposons que 5 hommes sur 100 et 25 femmes sur 10000 soient daltoniens. Choisissons un daltonien au hasard. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme, si l'on suppose que les hommes et les femmes sont en nombre égal ? (rép :0.9524)
- 9) Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. On suppose de plus que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. On désire tester l'efficacité du vaccin. Pour cela, on choisit un individu au hasard dans cette population et on note par M l'événement « l'individu est malade » et par V l'événement « l'individu est vacciné ».
- Calculer la probabilité que l'individu choisi soit malade. (rép: 0.2)

- (b) Calculer la probabilité que l'individu soit malade sachant qu'il n'est pas vacciné.
(rép: 0.26)
- (c) Le vaccin est-il efficace (càd $P(M|V) < P(M|\text{non}V)$)?
- 10) On suppose que la durée de vie (en heures) d'une pile d'un certain type suit une loi normale $N(40 ; 4.41)$.
- (a) Quelle est la probabilité qu'une pile de ce type dure plus de 41 heures et 30 minutes ? (rép :0.2389)
- (b) Quelle est la durée minimale d qui a au plus 2% de chances d'être dépassée par une pile de ce type ? (rép : $d=44.326$)
- 11) Sachant que la taille des êtres humains suit approximativement une loi normale de moyenne 171cm et d'écart-type 10cm, calculer :
- (a) le pourcentage de personne de plus de 178cm. (rép :0.242)
- (b) le pourcentage de personne ayant une taille comprise entre 160 et 165 cm. (rép :0,1386)
- 12) Un automobiliste effectue un parcours sur lequel se trouvent des feux tricolores. Ces feux fonctionnent de manière autonome et indépendante, et possèdent chacun le même cycle : vert pendant 25 secondes, orange pendant 5 secondes et rouge pendant 30 secondes.
- (a) Etant donné un feu tricolore. Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe au vert ? (rép :0.4167)
- (b) Quelle est la probabilité que sur son parcours, comportant dix feux tricolores, l'automobiliste rencontre exactement 6 feux verts ? (rép :0.1272)
- (c) Quelle est la probabilité que sur son parcours l'automobiliste ne rencontre que des feux verts ? (rép :0.00016)
- (d) Quel est le nombre moyen de feux verts que l'automobiliste rencontre sur son parcours ? (rép :4.17)
- 13) Des tickets de loterie sont vendus un euro. Un ticket sur 1000 est gagnant et rapporte une somme de 500 euros. Tous les autres sont perdants.
- (a) Quelle est la distribution de la variable aléatoire X (=gain brut ne tenant pas compte de la mise de départ) ? (rép : $\varepsilon = \{0, 500\}$ proba. associées 0.999 et 0.001)
- (b) Que valent la moyenne et la variance de X ? (rép : $E(X)=0.5$ et $V(X)=249.75$)
- (c) Que valent la moyenne et la variance du gain net W (obtenu en soustrayant le coût du ticket du gain brut) ? (rép : $E(W)=-0.5$ et $V(W)=249.75$)
- (d) Que valent la moyenne et l'écart type du gain brut $Z=X_1+X_2$ résultant de l'achat de 2 tickets ? (rép : $E(Z)=1$ et $\sigma(Z)=22.35$)
- 14) Une compagnie d'assurances constate que chaque année 0.004% de ses assurés meurent à la suite d'une certaine maladie. Quelle est la probabilité pour que la compagnie
- (a) n'ait pas de sinistre à payer ? (rép :0.99996)
- (b) doive payer plus de deux risques assurés, si elle gère 100 000 dossiers au cours d'une année ? (rép :0.7619)
- 15) On considère le jeu suivant : une urne contient six boules blanches et une boule rouge. Le joueur tire successivement et sans remise une boule jusqu'à tirer la boule rouge. On note k le rang du tirage de la boule rouge. On suppose que, à chaque tirage, chaque boule a autant de chance d'être tirée. Le joueur gagne k euros si k est pair et perd k euros si k est impair. Soit X désignant le gain en euros du joueur. (Aide : utiliser un arbre)
- (a) Déterminer la distribution de la variable X ? (rép : $\varepsilon = \{-7, -5, -3, -1, 2, 4, 6\}$ avec la même proba. associée 0.1428 ; on parle d'équiprobabilité des événements)

- (b) Que vaut sa moyenne? (rép :-0.5714)
- (c) Ce jeu est-il intéressant pour le joueur ? (rép : non car en moyenne il est perdant)
- (d) Sachant que la première boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que le joueur gagne de l'argent ? (rép : 0.5)
- 16) Les gens entrent dans un casino au rythme d'une personne toutes les deux minutes.
- (a) Quelle est la probabilité qu'il n'entre personne entre 12h et 12h05? (rép:0.0821)
- (b) Quelle est la probabilité que 4 personnes au moins se présentent durant cette même période? (rép:0.2424)
- 17) Un moyen de vérifier si les individus sélectionnés pour participer à un sondage sont « représentatifs » de la population cible est de comparer certaines caractéristiques démographiques de l'échantillon avec les caractéristiques correspondantes de la population. Supposons qu'un sondage soit organisé aux USA auprès d'adultes (18 ans et plus). On sait, d'après un recensement, que 23772494 des 209128094 adultes se qualifient comme étant « noirs » (ou « afro-américains »).
- (a) Quelle est la proportion de noirs aux USA ? (rép : $p=0.1136743$)
- (b) Un sondage est organisé auprès de 1500 adultes choisis au hasard. Quelle est la distribution du nombre de noirs dans cet échantillon ? Que valent la moyenne et la variance de cette variable aléatoire ? (rép : $B(1500,p)$; 170.5 ; 151.13)
- (c) Si une approximation le permet, calculer la probabilité que l'échantillon contiennent au moins 170 noirs ? (rép : 0.52)
- 18) En moyenne, le nombre d'inscriptions à un cours de psychologie est 100 étudiants. Le professeur donnant ce cours a décidé que si le nombre d'inscriptions est au-delà de 120, il créera deux sections et donnera donc deux cours, tandis qu'en deçà une seule classe sera formée. Quelle est la probabilité que ce professeur ait à donner deux fois le cours ? Donner une valeur approchée de cette probabilité si cela est possible et si la valeur exacte semble difficile à calculer. (rép : 0.0228)
- 19) On sait que 30% de la population est hypermétrope. Un nouveau test arrive sur le marché. Son efficacité est mise à l'épreuve en l'appliquant à des individus dont on connaît l'état. Sur un échantillon d'individus hypermétrope, le test est positif pour 98% d'entre eux. Sur un échantillon d'individus sains, le test est négatif pour 97% d'entre eux. Si on choisit aléatoirement une personne de la population,
- (a) quelle est la probabilité que son test soit positif? (rép:0.315)
- (b) quelle est la probabilité que la personne soit malade si le test est négatif? (rép:0.0088)
- 20) En supposant que $Z \sim N(0,1)$, calculer à l'aide de la table appropriée :
- (a) $P(Z < 2.4)$ (rép : 0.9918)
- (b) $P(Z < -1.8)$ (rép : 0.0359)
- (c) $P(Z > 1.12)$ (rép : 0.1314)
- (d) $P(Z > -0.46)$ (rép : 0.6772)
- (e) $P(1.14 < Z < 2.23)$ (rép : 0.1142)
- (f) $P(-1.88 < Z < 0.22)$ (rép : 0.5570)
- (g) $P(-2.01 < Z < -0.78)$ (rép : 0.1955)
- 21) En supposant que $Z \sim N(0,1)$, trouver la valeur de z telle que
- (a) $P(Z < z) = 0.9744$ (rép : 1.95)

- (b) $P(Z < z) = 0.025$ (rép : -1.96)
- (c) $P(Z > z) = 0.75$ (rép : 0.-67)
- (d) $P(z < Z < 3.4) = 0.7907$ (rép : -0.81)
- (e) $P(-z < Z < z) = 0.90$ (rép : 1.645)

22) Une manufacture emploie 100 ouvriers, dont les $\frac{3}{4}$ ont plus de 30 ans, les $\frac{2}{5}$ sont célibataires et les $\frac{4}{5}$ sont syndiqués. On sait en outre que :

- parmi les ouvriers de moins de 30 ans, 40% sont célibataires.
- parmi les ouvriers célibataires, la proportion de syndiqués est de $\frac{3}{4}$.

- (a) On demande la probabilité qu'un ouvrier pris au hasard soit célibataire ou syndiqué. (rep: 0,90)
- (b) On demande la probabilité qu'un ouvrier pris au hasard soit célibataire sachant qu'il est syndiqué. (rep: $\frac{3}{8}$)
- (c) On demande la probabilité qu'un ouvrier pris au hasard soit célibataire et âgé de plus de 30 ans. (rep: 0,30)
- (d) On demande de vérifier s'il y a indépendance entre le fait d'être syndiqué et d'être célibataire. (rep: pas d'indépendance)

23) On estime que dans une région africaine, les séropositifs représentent 20% de la population. Un nouveau test de dépistage du sida est utilisé et possède les caractéristiques suivantes: pour une personne saine, il donne une réponse négative dans 95% des cas et pour une personne infectée, il donne une réponse positive dans 99% des cas. Un individu se présente au dépistage et la réponse du test est négative: quelle est la probabilité que cette personne ne soit pas contaminée? (rep: 0,9974) Un individu se présente au dépistage et la réponse du test est positive: quelle est la probabilité que cette personne soit séropositive? (rep: 0,832)

24) On a relevé dans une ville de 100 000 habitants le nombre de véhicules possédés par ménage. On a obtenu les résultats suivants :

Nbre de véhicules par ménage	0	1	2	3	4
Proportion de ménages	0,18	0,62	0,15	0,04	0,01

On sélectionne un ménage au hasard dans cette ville. Soit X le nombre de véhicules observé pour ce ménage. Que valent $E(X)$ et $V(X)$? (rep: $E(X)=1,08$, $V(x)=0,57$)

25) 46% des habitants d'un pays vivent dans une location. Dix habitants sont sélectionnés au hasard dans la population de ce pays.

- (a) Quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne soit dans une location ? (rep: 0,0021)
- (b) Qu'au moins quatre soient dans une location ? (rep: 0,7547)
- (c) Que tous le soient ? (rep: 0,0004)

26) Un examen se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiples composé de 5 questions à 3 choix chacune. Un seul choix peut être fait à chaque question et il y a une seule bonne réponse à chaque question. Pour chaque réponse correcte, l'élève reçoit 3 points. Par contre, il perd 1 point pour chaque réponse incorrecte. Un étudiant décide de répondre au hasard à chacune des 5 questions. Calculez la moyenne (l'espérance mathématique) de la variable aléatoire « résultat de l'étudiant ». rep: ($E(X)=1,6667$)

27) Le taux de réussite en première candidature est de 25%. Sept étudiants présentent les examens. Quelle est la probabilité qu'aucun d'eux ne réussisse? (rep: 0,1335) Qu'au moins quatre réussissent? (rep: 0,0705) Que tous réussissent? (rep: 0,00006)

28) Un étudiant propriétaire d'un GSM reçoit en moyenne 5 appels par jour.

(a) Que vaut la probabilité qu'il reçoive au moins deux appels sur une journée. (rep: 0,9596)

(b) Estimez le nombre de jours par an où il ne recevra aucun appel. (rep: 2,4593)

(c) Un jour, vous appelez deux fois cet étudiant. Quelle est alors pour vous la probabilité que cet étudiant reçoive ce jour là moins de 5 appels. (rep: 0,4169)

(On supposera que le nombre d'appels journaliers suit une loi de Poisson. Explicitez vos raisonnements et calculs.)