

Exercices sur l'introduction générale
à la notion de probabilité
2008-2009

- 1) On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer :
- le roi de cœur ?
 - une dame ?
 - une carte qui ne soit pas un nombre ?
 - une carte portant un nombre impair de points ou un roi ?
 - une carte de trèfle ou un valet ?
 - une carte de carreau et une figure ?
- 2) Une boule est tirée au hasard d'une boîte contenant 4 boules rouges, 6 boules blanches, 2 boules vertes et 8 boules noires. Déterminez la probabilité qu'elle soit :
- rouge.
 - verte.
 - non blanche.
 - verte ou noire.
 - noire ou blanche.

- 3) La distribution du type de médecin en Belgique est la suivante :

<i>Généralistes</i>	<i>Internistes</i>	<i>Chirurgiens</i>	Autres
0,675	0,18	0,07	?

- Que vaut la probabilité d'avoir un autre type que les trois décrits dans ce tableau?
 - Un interniste est suivi par un médecin qui a une spécialisation (càd qui n'est pas généraliste). Quelle est la probabilité qu'un médecin belge choisi au hasard puisse superviser l'interniste ?
- 4) La distribution du type de médecin en Allemagne est la suivante :

<i>Généralistes</i>	<i>Internistes</i>	<i>Chirurgiens</i>	Autres
0,53	0,23	0,15	0,09

Si un Belge et un Allemand sont choisis indépendamment et au hasard,

- quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux des chirurgiens?
 - quelle est la probabilité qu'ils aient la même fonction (parmi les trois fonctions décrites explicitement dans le tableau) ?
- 5) Les prénoms les plus populaires pour les filles en Belgique en 2006 sont :

prénoms	Emma	Marie	Laura	Julie	Louise	Clara
probabilités	0.0121	0.0093	0.0085	0.0084	0.0079	0.0077

- Quelle est la plausibilité qu'une fille belge née en 2006 (dont on ne sait rien d'autre à priori) porte un autre prénom que les six cités ?
- Quelle est la plausibilité que le prénom de cette fille soit Emma ou Clara ?
- Quelle est la plausibilité que deux filles belges nées en 2006 (dont on ne sait d'autre à priori) portent toutes les deux soit le prénom Laura soit le prénom Clara ?

- 6) La probabilité qu'un individu pris au hasard apprécie à la fois le théâtre et le cinéma est 0.15. D'autre part, la probabilité qu'il apprécie le théâtre est de 0.3 et celle qu'il apprécie le cinéma ou le théâtre est de 0.6. Déterminer la probabilité qu'il n'aime pas le cinéma.
- 7) Dans une entreprise, 40% des vendeurs réalisent au moins 3 ventes par jour, 10% ont suivi un stage de négociation, 7% ont suivi le stage et réalisent au moins 3 ventes par jour. Quelle est la probabilité qu'un vendeur pris au hasard :
- ait suivi le stage ou réalise au moins 3 ventes par jour ?
 - réalise au moins 3 ventes par jour et n'ait pas suivi le stage ?
 - réalise moins de 3 ventes par jour et ait suivi le stage ?
 - réalise au plus 2 ventes par jour et n'ait pas suivi le stage ?

Probabilité conditionnelle (dont théorème de Bayes)

- 8) Un sondage effectué auprès d'automobilistes ayant effectué un trajet reliant deux villes V et V' montre que 60% des automobilistes transportent des enfants et que, parmi ceux-ci, 85% se sont arrêtés au moins une fois au cours du trajet, alors que 70% des automobilistes voyageant sans enfant ne se sont pas arrêtés. On interroge au hasard un automobiliste. Quelle est la probabilité que l'automobiliste interrogé :
- transporte des enfants ?
 - se soit arrêté au moins une fois ?
 - ne transporte pas d'enfants mais se soit arrêté au moins une fois ?
- 9) Un recensement des mariages dans une ville révèle la répartition suivante des couples :

Age de l'époux lors du mariage	Age de l'épouse lors du mariage				Total
	[18,22[[22,26[[26,30[[30,34[
[20,24[21	7	3	0	31
[24,28[23	29	10	5	67
[28,32[7	18	8	3	36
[32,36[0	2	3	3	8
[36,40[0	1	4	3	8
Total	51	57	28	14	150

Supposons qu'un couple soit choisi au hasard.

- Quelle est la probabilité que la femme ait moins de 22 ans ?
 - Quelle est la probabilité que la femme ait moins de 22 ans et que l'homme ait entre 24 ans et 28 ans ?
 - Sachant que la femme a moins de 22 ans, quelle est la probabilité que l'homme ait entre 24 ans et 28 ans ?
 - Sachant que l'homme a entre 24 ans et 28 ans, quelle est la probabilité que la femme ait moins de 22 ans ?
 - Quelle est la probabilité qu'un homme ait au moins 32 ans ?
- 10) Dans un jeu de roulette russe, une personne choisit au hasard une arme parmi trois revolvers disponibles. Ces derniers contiennent tous six chambres. Le nombre de chambres vides dans chaque arme est respectivement égal à 4, 3 et 2. Trouvez la probabilité pour que la personne survive à ce jeu (c'est-à-dire qu'elle choisisse une chambre vide).

- 11) Un skieur participe à une épreuve de slalom. L'expérience montre que la plausibilité de réussir le slalom dépend du type de neige sur la piste ce jour-là. Si la neige est poudreuse, la plausibilité de réussir le slalom vaut $1/2$. Si la neige est dure, la plausibilité de réussir le slalom vaut $1/5$. Si la neige est verglacée, la plausibilité de réussir le slalom vaut $3/10$. Les plausibilités que la neige soit poudreuse, dure ou verglacée valent respectivement $1/2$, $1/6$, et $1/3$. Quelle est la plausibilité pour que :
- le slalom soit réussi ?
 - la neige soit dure sachant que le slalom est réussi ?
 - le skieur, en participant à trois épreuves distinctes, réussisse au moins 1 slalom ? On suppose que les résultats des trois épreuves sont indépendantes.
- 12) Parmi les abonnés d'un quotidien, 50% résident en région parisienne, 40% en province et 10% à l'étranger. Ce quotidien publie un supplément mensuel. Parmi les abonnés de la région parisienne, 20% sont aussi abonnés au supplément. Parmi les abonnés de province, 90% ne sont pas abonnés au supplément. Enfin, 17% de tous les abonnés au quotidien sont aussi abonnés au supplément. Pour un abonné au quotidien pris au hasard, déterminer la probabilité :
- qu'il réside à l'étranger et soit abonné au supplément.
 - qu'il réside à l'étranger ou soit abonné au supplément.
 - qu'il soit abonné au supplément sachant qu'il réside à l'étranger.
 - qu'il réside à l'étranger sachant qu'il est abonné au supplément.
 - qu'il réside en région parisienne sachant qu'il n'est pas abonné au supplément.
- 13) Une maladie atteint 3 % d'une population donnée. Dans ce qui suit on appellera " malades " les individus atteints de cette maladie et " bien portants " ceux qui ne le sont pas. On dispose d'un test pour la détecter. Ce test permet de détecter la maladie chez 95% des individus malades (95%=sensibilité du test) et chez 2% des individus bien portants (98%= spécificité du test). On décide d'hospitaliser tous les individus ayant un test positif.
- Calculer la probabilité d'être bien portant parmi les individus hospitalisés.
 - On considère un échantillon de 10 personnes prises de façon indépendante parmi les personnes hospitalisées. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une personne bien portante parmi elles ?

Manipulation de la table N(0,1)

- 14) En supposant que $Z \sim N(0,1)$, calculer à l'aide de la table appropriée :
- $P(Z < 2.1)$
 - $P(Z < -1.56)$
 - $P(Z > 1.47)$
 - $P(Z > -0.58)$
 - $P(0.36 < Z < 1.23)$
 - $P(-0.88 < Z < 1.23)$
 - $P(-1.78 < Z < -0.3)$
- 15) En supposant que $Z \sim N(0,1)$, trouver la valeur de z telle que
- $P(Z < z) = 0.9949$
 - $P(Z < z) = 0.1251$
 - $P(Z > z) = 0.0010$
 - $P(Z > z) = 0.5675$
 - $P(z < Z < 3.4) = 0.7907$
 - $P(-z < Z < z) = 0.90$

- 16) En supposant que les bénéfices quotidiens d'un magasin admettent la distribution normale de moyenne 1000 et d'écart-type 150, déterminez :
- (a) la probabilité d'avoir un bénéfice supérieur ou égal à 1250.
 - (b) la probabilité d'avoir un bénéfice compris entre 1050 et 1450.
 - (c) la valeur des quartiles $x_{1/4}$ (càd le bénéfice minimum qui a au moins 25% de chance de se réaliser) et $x_{3/4}$ (càd tel que $P(\text{bénéfices} < x_{3/4}) > 0.75$) de cette distribution.

Distribution, moyenne et variance d'une variable aléatoire discrète

- 17) Considérons une urne contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 euros pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1 euro pour chaque boule blanche tirée. On choisit une boule au hasard. Désignons les gains nets par X.
- (a) Quelle est la distribution de la variable aléatoire X ?
 - (b) Que valent la moyenne et la variance de X ?
 - (c) Quelle est la distribution de la variable aléatoire W désignant les gains nets lors du tirage de 2 boules de l'urne ?
 - (d) Que valent la moyenne et la variance de W ?
 - (e) Que deviennent les points c et d si on considère un tirage avec remise ?
- 18) Une urne contient 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2 et 3 jetons numérotés 3. On tire, au hasard, successivement deux jetons sans remise. On note X la somme des chiffres des deux jetons tirés
- (a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons identiques ?
 - (b) Quelle est la distribution de la variable X ?
 - (c) Que valent la moyenne et l'écart type de X ?

Distribution binomiale et son approximation normale

- 19) Désireux d'entretenir votre forme physique sans excès de fatigue, vous vous livrez chaque matin (du lundi au samedi inclus) au petit jeu suivant : ayant jeté un dé bien équilibré, vous vous rendez à pied à votre travail si le résultats obtenu est inférieur ou égal à 4 ; dans le cas contraire, vous restez au lit.
- (a) Quelle est la probabilité de rester au lit ?
 - (b) Quelle est la distribution du nombre de jours d'une semaine où vous avez « gagné » le droit de rester au lit ? Que valent la moyenne et la variance de cette variable ?
 - (c) Calculez $P(X \leq 3)$; $P(X=4)$; $P(X < 2)$; $P(2 \leq X \leq 5)$
- 20) Un processus de fabrication produit des cylindres métalliques. Pour qu'un cylindre soit conforme, il faut que sa longueur (L) soit comprise entre 8.4 cm et 8.615 cm et que son diamètre (D) soit compris entre 1.5404 cm et 1.5886 cm. Le processus de fabrication est tel que la longueur des cylindres est distribuée selon une loi normale $N(8.54 ; 0.0025)$ et leur diamètre selon une loi normale (indépendante de la précédente) $N(1.57 ; 0.0001)$.
- (a) Quelle est la probabilité qu'un cylindre prélevé au hasard dans la production soit conforme ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'un lot de 7 cylindres prélevés au hasard dans la production contienne au plus 1 cylindre non conforme ?
 - (c) Quelle est la probabilité qu'un lot de 700 cylindres prélevés au hasard dans la production contienne au plus 90 cylindres non conforme ?

Distribution de poisson et son approximation normale

- 21) Le nombre moyen d'appels parvenant à la police le samedi matin en une 30 minutes est de 2 appels.
- (a) Quelle est la distribution du nombre d'appel parvenant à la police le samedi matin en deux heures?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'aucun appel ne parvienne à la police pendant ces deux heures ?
 - (c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 appels parvenant à la police pendant ces deux heures ?
 - (d) Calculez l'espérance, la variance et l'écart type du nombre d'appels parvenant à la police pendant ces deux heures .
- 22) On s'intéresse aux accidents dus à des brûlures provoquées par de l'acide sulfurique. Supposons que le nombre annuel de tels accidents suit une loi de Poisson de paramètre 100. Déterminer la probabilité qu'une certaine année, il y ait :
- (a) plus de 130 accidents
 - (b) comparer cette probabilité à celle obtenue avec une approximation.