

## EXERCICES SUR LE CHAPITRE 1 : 1<sup>ÈRE</sup> PARTIE

### Les règles fondamentales du calcul des probabilités

#### Le théorème de probabilité totale et le théorème de Bayes

---

#### FORMULES

- Règle de la somme (OU) :  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- Règle du produit (ET) :  $P(AB) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A)$
- Théorème de probabilité totale :
  - Si B a seulement 2 catégories :  $P(A) = P(A|B) P(B) + P(A|\bar{B}) P(\bar{B})$
  - Si B a n catégories avec  $n > 2$  :  $P(A) = P(A|B_1) P(B_1) + \dots + P(A|B_n) P(B_n)$
- Théorème de Bayes :  $P(B|A) = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A)}$

#### EXERCICES À FAIRE À LA SÉANCE DE TP

1. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer :
  - a. le roi de cœur ?
  - b. une dame ?
  - c. une carte qui ne soit pas un nombre ?
  - d. une carte portant un nombre impair de points ou un roi ?
  - e. une carte de trèfle ou un valet ?
  - f. une carte de carreau et une figure ?

2. Les prénoms les plus populaires pour les filles en Belgique en 2006 sont :

Prénoms	Emma	Marie	Laura	Julie	Louise	Clara
Probabilités	0.0121	0.0093	0.0085	0.0084	0.0079	0.0077

- a. Quelle est la plausibilité qu'une fille belge née en 2006 (dont on ne sait rien d'autre a priori) porte un autre prénom que les six cités ?
  - b. Quelle est la plausibilité que le prénom de cette fille soit Emma ou Clara ?
  - c. Quelle est la plausibilité que deux filles belges nées en 2006 (dont on ne sait d'autre a priori) portent toutes les deux soit le prénom Laura soit le prénom Clara ?
3. La distribution du type de médecin en Belgique est la suivante :

Généralistes	Internistes	Chirurgiens	Autres
0,675	0,18	0,07	?

- a. Que vaut la probabilité d'avoir un autre type que les trois décrits dans ce tableau ?
- b. Un interniste est suivi par un médecin qui a une spécialisation (càd qui n'est pas généraliste). Quelle est la probabilité qu'un médecin belge choisi au hasard puisse superviser l'interniste ?

La distribution du type de médecin en Allemagne est la suivante :

Généralistes	Internistes	Chirurgiens	Autres
0,53	0,23	0,15	0,09

Si un Belge et un Allemand sont choisis indépendamment et au hasard,

- c. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux des chirurgiens?
  - d. Quelle est la probabilité qu'ils aient la même fonction (parmi les trois fonctions décrites explicitement dans le tableau) ?
4. La probabilité qu'un individu pris au hasard apprécie à la fois le théâtre et le cinéma est de 0,15. D'autre part, la probabilité qu'il apprécie le théâtre est de 0,3 et celle qu'il apprécie le cinéma ou le théâtre est de 0,6. Déterminez la probabilité qu'il n'aime pas le cinéma.
5. Un service météorologique a établi qu'au cours d'une journée d'avril, il pleut avec une probabilité 0.35 et il neige avec une probabilité de 0.08. D'autre part, il y a une température supérieure ou égale à 20 degrés avec une probabilité de 0.52. Il y a de la pluie et une température inférieure à 20 degrés avec une probabilité 0.2. La pluie et la neige sont des événements incompatibles, de même que la neige et une température supérieure ou égale à 20 degrés. Quelle est la probabilité que lors d'une journée d'avril :
- a. il pleuve ou il neige ?
  - b. il n'y ait ni pluie ni neige ?
  - c. il y ait de la neige et une température inférieure à 20 degrés ?
  - d. il pleuve ou la température soit inférieure à 20 degrés ?
6. Un recensement des mariages dans une ville révèle la répartition suivante des couples :

Age de l'époux lors du mariage	Age de l'épouse lors du mariage				Total
	[18,22[	[22,26[	[26,30[	[30,34[	
[20,24[	21	7	3	0	31
[24,28[	23	29	10	5	67
[28,32[	7	18	8	3	36
[32,36[	0	2	3	3	8
[36,40[	0	1	4	3	8
<b>Total</b>	<b>51</b>	<b>57</b>	<b>28</b>	<b>14</b>	150

Supposons qu'un couple soit choisi au hasard.

- a. Quelle est la probabilité que la femme ait moins de 22 ans ?
- b. Quelle est la probabilité que la femme ait moins de 22 ans et que l'homme ait entre 24 ans et 28 ans ?
- c. Sachant que la femme a moins de 22 ans, quelle est la probabilité que l'homme ait entre 24 ans et 28 ans ?
- d. Sachant que l'homme a entre 24 ans et 28 ans, quelle est la probabilité que la femme ait moins de 22 ans?
- e. Quelle est la probabilité qu'un homme ait au moins 32 ans ?

7. Dans un jeu de roulette russe, une personne choisit au hasard une arme parmi trois revolvers disponibles. Ces derniers contiennent tous six chambres. Le nombre de chambres vides dans chaque arme est respectivement égal à 4, 3 et 2. Trouvez la probabilité pour que la personne survive à ce jeu (c'est-à-dire qu'elle choisisse une chambre vide).
  
8. Un sondage effectué auprès d'automobilistes ayant effectué un trajet reliant deux villes V et V' montre que 60% des automobilistes transportent des enfants et que, parmi ceux-ci, 85% se sont arrêtés au moins une fois au cours du trajet, alors que 70% des automobilistes voyageant sans enfant ne se sont pas arrêtés. On interroge au hasard un automobiliste. Quelle est la probabilité que l'automobiliste interrogé :
  - a. transporte des enfants ?
  - b. se soit arrêté au moins une fois ?
  - c. ne transporte pas d'enfants mais se soit arrêté au moins une fois ?
  
9. Dans une entreprise, 40% des vendeurs réalisent au moins 3 ventes par jour, 10% ont suivi un stage de négociation, 7% ont suivi le stage et réalisent au moins 3 ventes par jour. Quelle est la probabilité qu'un vendeur pris au hasard :
  - a. ait suivi le stage ou réalise au moins 3 ventes par jour ?
  - b. réalise au moins 3 ventes par jour et n'ait pas suivi le stage ?
  - c. réalise moins de 3 ventes par jour et ait suivi le stage ?
  - d. réalise au plus 2 ventes par jour et n'ait pas suivi le stage ?
  
10. Un skieur participe à une épreuve de slalom. L'expérience montre que la plausibilité de réussir le slalom dépend du type de neige sur la piste ce jour-là. Si la neige est poudreuse, la plausibilité de réussir le slalom vaut  $1/2$ . Si la neige est dure, la plausibilité de réussir le slalom vaut  $1/5$ . Si la neige est verglacée, la plausibilité de réussir le slalom vaut  $3/10$ . Les plausibilités que la neige soit poudreuse, dure ou verglacée valent respectivement  $1/2$ ,  $1/6$ , et  $1/3$ . Quelle est la plausibilité pour que :
  - a. le slalom soit réussi ?
  - b. la neige soit dure sachant que le slalom est réussi ?
  
11. Une maladie atteint 3 % d'une population donnée. Dans ce qui suit on appellera " malades " les individus atteints de cette maladie et " bien portants " ceux qui ne le sont pas. On dispose d'un test pour la détecter. Ce test permet de détecter la maladie chez 95% des individus malades (95%=sensibilité du test) et chez 2% des individus bien portants (98%= spécificité du test). On décide d'hospitaliser tous les individus ayant un test positif. Calculez la probabilité d'être bien portant parmi les individus hospitalisés.

## EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

- Une boule est tirée au hasard d'une boîte contenant 4 boules rouges, 6 boules blanches, 2 boules vertes et 8 boules noires. Déterminez la probabilité qu'elle soit :
  - rouge ?
  - verte ?
  - non blanche ?
  - verte ou noire ?
  - noire ou blanche ?
- Un groupe d'étudiants est formé de 20 étudiants de première année (10 filles et 10 garçons) et de 30 étudiants de deuxième année (18 filles et 12 garçons). On choisit au hasard une personne dans ce groupe. Déterminer la plausibilité qu'elle soit :
  - De première année
  - Un garçon
  - Une fille de deuxième année

- Les couleurs les plus populaires pour les voitures aux USA sont :

Couleur	Grise	Blanche	Noire	Vert foncé	Bleu foncé	Vert moyen
Probabilité	0.176	0.172	0.113	0.089	0.088	0.067

- Quelle est la plausibilité que le véhicule acheté par un consommateur américain (dont on ne sait rien a priori) soit d'une autre couleur que les six citées?
  - Quelle est la plausibilité que le véhicule de cet Américain soit gris ou blanc?
  - Quelle est la plausibilité que deux Américains (dont on ne sait rien d'autre a priori que ce qui suit) possédant chacun un véhicule aient tous les deux une voiture de couleur grise ou blanche?
- La distribution des groupes sanguins aux USA est :

Groupe sanguin	O	A	B	AB
Probabilité	0.45	0.40	0.11	?

- Que vaut  $P(AB)$ ?
- Maria est du groupe B. Elle peut recevoir une transfusion des personnes des groupes O et B. Quelle est la probabilité qu'un Américain choisi au hasard puisse lui donner du sang sans risque?

La distribution des groupes sanguins en Chine est donnée par :

Groupe sanguin	O	A	B	AB
Probabilité	0.35	0.27	0.26	0.12

Si un Américain et un Chinois sont choisis indépendamment et au hasard,

- Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux du groupe O?
- Quelle est la probabilité qu'ils appartiennent au même groupe sanguin?

5. La distribution des catégories de travail parmi la population active de Belgique est donnée dans le tableau ci-dessous :

Catégories d'activités	Ouvrier	Employé	Fonctionnaire	Indépendant
Probabilités	0.27	0.36	0.24	?

Lors de la constitution d'un jury d'Assises, on tire aléatoirement et indépendamment des individus hors de cette population.

- Quelle est la probabilité d'être indépendant ?
- Quelle est la probabilité qu'un membre du jury tiré au hasard soit salarié (c'est-à-dire ouvrier ou employé) ?
- Quelle est la probabilité que deux membres tirés au hasard soient tous les deux salariés ?
- Si le premier membre du jury est fonctionnaire, quelle est la probabilité que le second le soit aussi ?
- Si les dix premiers sont fonctionnaires, quelle est la probabilité que le suivant le soit aussi ?

La distribution des catégories de travail parmi la population active au Luxembourg est donnée dans le tableau ci-dessous :

Catégories d'activités	Ouvrier	Employé	Fonctionnaire	Indépendant
Probabilités	0.12	0.42	0.17	0.29

Si un Belge et un Luxembourgeois sont choisis indépendamment et au hasard,

- Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux ouvriers ?
- Quelle est la probabilité qu'ils aient la même catégorie de travail ?
- Quelle est la probabilité qu'ils n'aient pas la même catégorie de travail ?

6. Une classe de 115 étudiants se compose des quatre groupes suivants :

	Garçons	Filles	Total
Physique	42	23	65
Mathématique	13	37	50
Total	55	60	115

On choisit un étudiant au hasard comme délégué de classe.

- Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?
- Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
- Quelle est la probabilité que ce soit un(e) étudiant(e) de physique ?
- Quelle est la probabilité que ce soit un garçon inscrit en mathématique ?
- Quelle est la probabilité que ce soit un(e) étudiant(e) de physique ou un garçon ?
- Quelle est la probabilité que ce soit une étudiante de physique ou un garçon ?
- Quelle est la probabilité que ce soit une fille non inscrite en physique ?
- Quelle est la probabilité que ce ne soit ni un(e) étudiant(e) en math, ni une fille ?
- Sachant qu'il s'agit d'un garçon, quelle est la probabilité qu'il soit en mathématique ?
- Et s'il s'agit d'une fille ?

7. Une organisation de consommateurs comporte 1200 membres dont la répartition est la suivante :

	Hommes	Femmes	Total
Campagne	180	162	342
Banlieue	285	318	603
Centre-Ville	105	150	255
Total	570	630	1200

Supposons qu'un consommateur soit choisi au hasard.

- Quelle est la probabilité qu'il soit un homme ?
  - Quelle est la probabilité qu'il vive en centre-ville ?
  - Quelle est la probabilité que ce soit une femme de banlieue ?
  - Sachant qu'il s'agit d'une femme, quelle est la probabilité qu'elle habite en banlieue?
  - Sachant que cette personne habite à la campagne, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme ?
8. On tire une à une 3 boules d'un sac contenant 5 boules blanches et 3 boules noires.
- Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes les 3 blanches ?
  - Quelle est la probabilité pour qu'il y ait deux boules noires parmi les boules tirées ?
  - Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins une boule noire parmi les boules tirées ?
  - Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes les 3 de même couleur ?
  - Supposons maintenant que l'on dispose de trois urnes selon cette composition et que l'on tire une boule dans chacune d'entre elles. Que deviennent les probabilités précédentes ?
9. Une compagnie démarché des acheteurs par téléphone. Elle choisit ses correspondants au hasard dans le bottin. L'expérience montre que 70% des appels n'aboutissent pas (pas de réponse ou refus de parler), 20% conduisent à une interlocutrice et 10% à un interlocuteur. Sachant que 30% des femmes et 20% des hommes engageant la discussion finissent par acheter quelque chose, quel est le pourcentage d'appels conduisant à une vente?
10. On suppose qu'un test de dépistage pour le cancer est caractérisé par une fiabilité de 98% pour ceux qui n'ont pas la maladie et de 95% pour ceux qui sont malades. Dans la population, 0,4% des gens ont le cancer. Une personne fait un dépistage, quelle est la probabilité que le test indique un cancer ?
11. Parmi les abonnés d'un quotidien, 50% résident en région parisienne, 40% en province et 10% à l'étranger. Ce quotidien publie un supplément mensuel. Parmi les abonnés de la région parisienne, 20% sont aussi abonnés au supplément. Parmi les abonnés de province, 90% ne sont pas abonnés au supplément. Enfin, 17% de tous les abonnés au quotidien sont aussi abonnés au supplément. Pour un abonné au quotidien pris au hasard, déterminer la probabilité :
- qu'il réside à l'étranger et soit abonné au supplément.
  - qu'il réside à l'étranger ou soit abonné au supplément.

- c. qu'il soit abonné au supplément sachant qu'il réside à l'étranger.
  - d. qu'il réside à l'étranger sachant qu'il est abonné au supplément.
  - e. qu'il réside en région parisienne sachant qu'il n'est pas abonné au supplément.
12. Supposons que 5 hommes sur 100 et 25 femmes sur 10000 soient daltoniens. Choisissons un daltonien au hasard. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme, si l'on suppose que les hommes et les femmes sont en nombre égal ?
13. On sait que 30% de la population est hypermétrope. Un nouveau test arrive sur le marché. Son efficacité est mise à l'épreuve en l'appliquant à des individus dont on connaît l'état. Sur un échantillon d'individus hypermétropes, le test est positif pour 98% d'entre eux. Sur un échantillon d'individus sains, le test est négatif pour 97% d'entre eux. Si on choisit aléatoirement une personne de la population,
- a. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
  - b. Quelle est la probabilité que la personne soit malade si le test est négatif
14. Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A, B, AB et O. Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur *Rhésus*. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit *Rhésus positif* (noté *Rh+*) et s'il ne possède pas ce facteur, il est dit *Rhésus négatif* (noté *Rh-*). Dans une certaine population P, on sait que 40% des individus ont un groupe sanguin A, 10% ont un groupe sanguin B, 5% ont un groupe sanguin AB et 45% ont un groupe sanguin O. Pour chaque groupe sanguin, la proportion d'individus possédant ou non le facteur *Rhésus* se répartit comme suit :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de *Rhésus négatif* est appelé *donneur universel*. On choisit un individu au hasard dans la population P. Calculer la probabilité des événements suivants :

- a. L'individu a un sang de groupe O.
- b. L'individu est un donneur universel.
- c. L'individu a un sang de Rhésus négatif.
- d. Si l'individu choisit a du sang de Rhésus négatif, quelle est la probabilité que cet individu soit du groupe O ?