EXERCICES SUR LE CHAPITRE 1 : 1ÈRE PARTIE

Les règles fondamentales du calcul des probabilités

Le théorème de probabilité totale et le théorème de Bayes

FORMULES

- Règle de la somme (OU) : $\mathrm{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$
- Règle du produit (ET) : $\mathrm{P(AB) = P(A|B)\ P(B) = P(B|A)\ P(A)}$
- Théorème de probabilité totale :
  - Si B a seulement 2 catégories : $\mathrm{P(A) = P(A|B)\ P(B) + P(A|\overline{B})\ P(\overline{B})}$
  - Si B a n catégories avec n > 2 : $\mathrm{P(A) = P(A|B_1)\ P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)\ P(B_n)}$
- Théorème de Bayes : $\mathrm{P(B|A) = \frac{P(A|B)\ P(B)}{P(A)}}$

EXERCICES À FAIRE DURANT LA SÉANCE DE TP

1. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer :
   a. le roi de cœur ?
   b. une dame ?
   c. une carte qui ne soit pas un nombre ?
   d. une carte portant un nombre impair de points ou un roi ?
   e. une carte de trèfle ou un valet ?
   f. une carte de carreau et une figure ?

2. Les prénoms les plus populaires pour les filles en Belgique en 2006 sont :

Prénoms	Emma	Marie	Laura	Julie	Louise	Clara
Probabilités	0.0121	0.0093	0.0085	0.0084	0.0079	0.0077

   a. Quelle est la plausibilité qu'une fille belge née en 2006 (dont on ne sait rien d'autre a priori) porte un autre prénom que les six cités ?
   b. Quelle est la plausibilité que le prénom de cette fille soit Emma ou Clara ?

c. Quelle est la plausibilité que deux filles belges nées en 2006 (dont on ne sait d'autre a priori) portent toutes les deux soit le prénom Laura soit le prénom Clara ?

3. La distribution du type de médecin en Belgique est la suivante :

Généralistes	Internistes	Chirurgiens	Autres
0,675	0,18	0,07	?

a. Que vaut la probabilité d'avoir un autre type que les trois décrits dans ce tableau?
b. Un interniste est suivi par un médecin qui a une spécialisation (càd qui n'est pas généraliste). Quelle est la probabilité qu'un médecin belge choisi au hasard puisse superviser l'interniste ?

La distribution du type de médecin en Allemagne est la suivante :

Généralistes	Internistes	Chirurgiens	Autres
0,53	0,23	0,15	0,09

Si un Belge et un Allemand sont choisis indépendamment et au hasard,

c. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux des chirurgiens?
d. Quelle est la probabilité qu'ils aient la même fonction (parmi les trois fonctions décrites explicitement dans le tableau) ?

4. La probabilité qu'un individu pris au hasard apprécie à la fois le théâtre et le cinéma est de 0,15. D'autre part, la probabilité qu'il apprécie le théâtre est de 0,3 et celle qu'il apprécie le cinéma ou le théâtre est de 0,6. Déterminez la probabilité qu'il n'aime pas le cinéma.

5. Un service météorologique a établi qu'au cours d'une journée d'avril, il pleut avec une probabilité 0.35 et il neige avec une probabilité de 0.08. D'autre part, il y a une température supérieure ou égale à 20 degrés avec une probabilité de 0.52. Il y a de la pluie et une température inférieure à 20 degrés avec une probabilité 0.2. La pluie et la neige sont des événements incompatibles, de même que la neige et une température supérieure ou égale à 20 degrés. Quelle est la probabilité que lors d'une journée d'avril :
   a. il pleuve ou il neige ?
   b. il n'y ait ni pluie ni neige ?
   c. il y ait de la neige et une température inférieure à 20 degrés ?
   d. il pleuve ou la température soit inférieure à 20 degrés ?

6. Un recensement des mariages dans une ville révèle la répartition suivante des couples :

	Age de l'épouse lors du mariage				
Age de l'époux lors du mariage	**[18,22[**	**[22,26[**	**[26,30[**	**[30,34[**	Total
[20,24[	21	7	3	0	31
[24,28[	23	29	10	5	67
[28,32[	7	18	8	3	36
[32,36[	0	2	3	3	8
[36,40[	0	1	4	3	8
Total	**51**	**57**	**28**	**14**	150

Supposons qu'un couple soit choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité que la femme ait moins de 22 ans ?
b. Quelle est la probabilité que la femme ait moins de 22 ans et que l'homme ait entre 24 ans et 28 ans ?
c. Sachant que la femme a moins de 22 ans, quelle est la probabilité que l'homme ait entre 24 ans et 28 ans ?
d. Sachant que l'homme a entre 24 ans et 28 ans, quelle est la probabilité que la femme ait moins de 22 ans?
e. Quelle est la probabilité qu'un homme ait au moins 32 ans ?

7. Dans un jeu de roulette russe, une personne choisit au hasard une arme parmi trois revolvers disponibles. Ces derniers contiennent tous six chambres. Le nombre de chambres vides dans chaque arme est respectivement égal à 4,3 et 2. Trouvez la probabilité pour que la personne survive à ce jeu (c'est-à-dire qu'elle choisisse une chambre vide).

8. Un sondage effectué auprès d'automobilistes ayant effectué un trajet reliant deux villes V et V' montre que 60% des automobilistes transportent des enfants et que, parmi ceux-ci, 85% se sont arrêtés au moins une fois au cours du trajet, alors que 70% des automobilistes voyageant sans enfant ne se sont pas arrêtés. On interroge au hasard un automobiliste. Quelle est la probabilité que l'automobiliste interrogé :

   a. transporte des enfants ?
   b. se soit arrêté au moins une fois ?
   c. ne transporte pas d'enfants mais se soit arrêté au moins une fois ?

9. Dans une entreprise, 40% des vendeurs réalisent au moins 3 ventes par jour, 10% ont suivi un stage de négociation, 7% ont suivi le stage et réalisent au moins 3 ventes par jour. Quelle est la probabilité qu'un vendeur pris au hasard :
   a. ait suivi le stage ou réalise au moins 3 ventes par jour ?
   b. réalise au moins 3 ventes par jour et n'ait pas suivi le stage ?
   c. réalise moins de 3 ventes par jour et ait suivi le stage ?
   d. réalise au plus 2 ventes par jour et n'ait pas suivi le stage ?

10. Un skieur participe à une épreuve de slalom. L'expérience montre que la plausibilité de réussir le slalom dépend du type de neige sur la piste ce jour-là. Si la neige est poudreuse, la plausibilité de réussir le slalom vaut 1/2. Si la neige est dure, la plausibilité de réussir le slalom vaut 1/5. Si la neige est verglacée, la plausibilité de réussir le slalom vaut 3/10. Les plausibilités que la neige soit poudreuse, dure ou verglacée valent respectivement 1/2, 1/6, et 1/3. Quelle est la plausibilité pour que :
    a. le slalom soit réussi ?
    b. la neige soit dure sachant que le slalom est réussi ?

11. Une maladie atteint 3 % d'une population donnée. Dans ce qui suit on appellera “ malades ” les individus atteints de cette maladie et “ bien portants ” ceux qui ne le sont pas. On dispose d'un test pour la détecter. Ce test permet de détecter la maladie chez 95% des individus malades (95%=sensibilité du test) et chez 2% des individus bien portants (98%= spécificité du test). On décide d'hospitaliser tous les individus ayant un test positif. Calculez la probabilité d'être bien portant parmi les individus hospitalisés.