EXERCICES SUR LE CHAPITRE 1 : 2ème PARTIE

Les distributions discrètes

FORMULES

- Moyenne et variance d'une variable aléatoire discrète :
  $\mu_Y = E(Y) = \sum_{y_i \in \varepsilon} p_i y_i$;
  $\sigma^2{}_Y = V(Y) = \sum_{y_i \in \varepsilon} p_i \, (y_i - \mu)^2$
- Distribution de Bernoulli :
  $\varepsilon_i = \{0, 1\} \; et \; p_0 = 1 - p; \; p_1 = p$;
  $E(X) = p$;
  $V(X) = p(1-p)$
- Distribution binomiale :
  $X \sim Bin\,(n, p)$;
  $p_x = Pr(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \, p^x \, (1-p)^{n-x}$;
  $E(X) = np$
  $V(X) = np\,(1-p)$
- Distribution de Poisson :
  $X \sim Pois\,(\mu)$;
  $p_x = Pr(X = x) = e^{-\mu} \, \frac{\mu^x}{x!}$
  $E(X) = V(X) = \mu$
- Approximation de la binomiale par la Poisson :
  Si $n > 50$ et $p < 0.10$, $Bin\,(n, p) \approx Pois\,(\mu = np)$

EXERCICES À FAIRE À LA SÉANCE DE TP

<u>Distribution, moyenne et variance d'une variance aléatoire discrète</u>

1. Un examen se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiples composé de 5 questions à 3 choix chacune. Un seul choix peut être fait à chaque question et il y a une seule bonne réponse à chaque question. Pour chaque réponse correcte, l'élève reçoit 3 points. Par contre, il perd 1 point pour chaque réponse incorrecte. Un étudiant décide de répondre au hasard à chacune des 5 questions. Calculez la moyenne de la variable aléatoire « résultat de l'étudiant ».

2. Une urne contient 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2 et 3 jetons numérotés 3. On tire, au hasard, successivement deux jetons sans remise. On note X la somme des chiffres des deux jetons tirés.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons identiques ?
   b. Quelle est la distribution de la variable X ?
   c. Que valent la moyenne et l'écart type de X ?

Distribution binomiale

3. Désireux d'entretenir votre forme physique sans excès de fatigue, vous vous livrez chaque matin (du lundi au samedi inclus) au petit jeu suivant : ayant jeté un dé bien équilibré, vous vous rendez à pied à votre travail si le résultat obtenu est inférieur ou égal à 4 ; dans le cas contraire, vous restez au lit.
   a. Quelle est la probabilité de rester au lit ?
   b. Quelle est la distribution du nombre de jours d'une semaine où vous avez « gagné » le droit de rester au lit ? Que valent la moyenne et la variance de cette variable ?
   c. Calculez $P(X \leq 3)$; $P(X=4)$; $P(X<2)$; $P(2 \leq X \leq 5)$

4. Lors d'une étude sur les revenus des employés d'une grande chaine d'hôtels, on a constaté que 94486 employés sur 134980 ont un revenu annuel brut inférieur à 50000€.
   a. Quelle est la proportion p d'employés de cette chaine gagnant moins de 50000€ ?
   b. Un sondage est organisé auprès de 12 de ces employés choisis au hasard. Quelle est la distribution du nombre de salaires inférieurs à 50000€ dans cet échantillon ?
   c. Que valent la moyenne et la variance de cette variable ?
   d. Quelle est la probabilité que sur ces 12 employés 2 aient un salaire inférieur à 50000€ ?
   e. Quelle est la probabilité que le nombre d'employés ayant un salaire inférieur à 50000€ soit compris entre 6 et 8 ?

Distribution de Poisson

5. Le nombre moyen d'appels parvenant à la police le samedi matin en 30 minutes est de 2 appels.
   a. Quelle est la distribution du nombre d'appel parvenant à la police le samedi matin en deux heures?
   b. Quelle est la probabilité qu'aucun appel ne parvienne à la police pendant ces deux heures ?
   c. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 appels parvenant à la police pendant ces deux heures ?
   d. Calculez l'espérance, la variance et l'écart type du nombre d'appels parvenant à la police pendant ces deux heures.

6. Les gens entrent dans un casino au rythme d'une personne toutes les deux minutes.
   a. Quelle est la probabilité qu'il n'entre personne entre 12h et 12h05?
   b. Quelle est la probabilité que 4 personnes au moins se présentent durant cette même période?

Approximation de la binomiale par la Poisson

7. Le taux de suicide pour un pays donné est de 1 personne pour 100000 habitants par mois.
   a. Quelle est la probabilité qu'il y ait 8 suicides ou plus en un mois dans une ville de 400000 âmes (utiliser une approximation) ?
   b. Quelle est la probabilité qu'au cours d'une année, le nombre de suicides mensuels dépasse 2 fois ou plus le niveau de 8 ?

c. Dans un pays voisin, sur un échantillon de 5000 personnes, on observe 2 vas de suicides en un mois. Peut-on considérer que le taux de suicide de ce pays est identique à celui du pays considéré ?

EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

Distribution, moyenne et variance d'une variance aléatoire discrète

1. On a relevé dans une ville de 100 000 habitants le nombre de véhicules possédés par ménage. On a obtenu les résultats suivants :

Nombre de véhicules par ménage :	0	1	2	3	4
Proportion de ménages :	0.18	0.62	0.15	0.04	0.01

   On sélectionne un ménage au hasard dans cette ville. Soit X le nombre de véhicules observé pour ce ménage. Que valent E(X) et V(X) ?

2. En supposant que vous soyez au rez-de-chaussée d'un immeuble de 8 étages, que vous y attendiez un ascenseur, qui ne se trouve pas là et qui peut se trouver à n'importe quel étage avec une même probabilité, combien de temps devrez-vous attendre en moyenne si l'ascenseur met 5 secondes pour passer d'un étage à l'autre (son démarrage et son arrêt étant considérés comme instantanés) ? Quel est l'écart-type de votre temps d'attente ?

3. Des tickets de loterie sont vendus un euro. Un ticket sur 1000 est gagnant et rapporte une somme de 500 euros ; tous les autres sont perdants.
   a. Quelle est la distribution de la variable aléatoire X (=gain brut ne tenant pas compte de la mise de départ)?
   b. Que valent la moyenne et la variance de X?
   c. Que valent la moyenne et la variance du gain net W (obtenu en soustrayant le coût du ticket du gain brut)?
   d. Que valent la moyenne et l'écart-type du gain brut $Z = X_1+X_2$ résultant de l'achat de 2 tickets?

4. On considère le jeu suivant : une urne contient six boules blanches et une boule rouge. Le joueur tire successivement et sans remise une boule jusqu'à tirer la boule rouge. On note k le rang du tirage de la boule rouge. On suppose que, à chaque tirage, chaque boule a autant de chance d'être tirée. Le joueur gagne k euros si k est pair et perd k euros si k est impair.
   Soit X désignant le gain en euros du joueur. (Aide : utiliser un arbre)
   a. Déterminer la distribution de la variable X ?
   b. Que vaut sa moyenne?
   c. Ce jeu est-il intéressant pour le joueur ?
   d. Sachant que la première boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que le joueur gagne de l'argent ?

Distribution binomiale

5. Un journaliste se voit remettre une liste de 8 personnes à interviewer. Il doit interroger au moins 5 personnes hors de cette liste. Les interviewés potentiels n'acceptent de parler qu'avec une probabilité de 2/3, indépendamment les uns des autres. A l'aide de la distribution binomiale, calculez la probabilité que le journaliste puisse réaliser au minimum ses 5 entretiens.

6. 46% des habitants d'un pays vivent dans une location. Dix habitants sont sélectionnés au hasard dans la population de ce pays.
   a. Quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne soit dans une location ?
   b. Qu'au moins quatre soient dans une location ?
   c. Que tous le soient ?

7. Le taux de réussite en première candidature est de 25%. Sept étudiants présentent les examens.
   a. Quelle est la probabilité qu'aucun d'eux ne réussisse?
   b. Qu'au moins quatre réussissent?
   c. Que tous réussissent?

8. Un automobiliste effectue un parcours sur lequel se trouvent des feux tricolores. Ces feux fonctionnent de manière autonome et indépendante, et possèdent chacun le même cycle : vert pendant 25 secondes, orange pendant 5 secondes et rouge pendant 30 secondes.
   a. Etant donné un feu tricolore. Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe au vert ?
   b. Quelle est la probabilité que sur son parcours, comportant dix feux tricolores, l'automobiliste rencontre exactement 6 feux verts ?
   c. Quelle est la probabilité que sur son parcours l'automobiliste ne rencontre que des feux verts ?
   d. Quel est le nombre moyen de feux verts que l'automobiliste rencontre sur son parcours ?

Distribution de Poisson

9. Un étudiant propriétaire d'un GSM reçoit en moyenne 5 appels par jour.
   a. Que vaut la probabilité qu'il reçoive au moins deux appels sur une journée ?
   b. Estimez le nombre de jours par an où il ne recevra aucun appel.
   c. Un jour, vous appelez deux fois cet étudiant. Quelle est alors pour vous la probabilité que cet étudiant reçoive ce jour-là moins de 5 appels. ?

10. Un zoologiste étudie les passages d'une espèce de chauve-souris en lisière d'un espace boisé. Il effectue un comptage d'individus et répertorie en moyenne 3 individus par 30 minutes.
   a. Quelle est la probabilité qu'il détecte 7 individus en 1h?
   b. Quelle est la probabilité qu'il détecte au plus 7 individus en 1h?
   c. Quelle est la probabilité qu'il détecte entre 2 et 4 individus par 15 minutes?