

FORMULES

- Moyenne et variance d'une variable aléatoire discrète :

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{y_i \in \mathcal{E}} p_i y_i ;$$
$$\sigma^2_Y = V(Y) = \sum_{y_i \in \mathcal{E}} p_i (y_i - \mu)^2$$

- Distribution de Bernoulli :

$$\mathcal{E}_i = \{0, 1\} \text{ et } p_0 = 1 - p; p_1 = p;$$

$$E(X) = p;$$

$$V(X) = p(1 - p)$$

- Distribution binomiale :

$$X \sim \text{Bin}(n, p);$$

$$p_x = Pr(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1 - p)^{n-x};$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

- Distribution de Poisson :

$$X \sim \text{Pois}(\mu);$$

$$p_x = Pr(X = x) = e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!}$$

$$E(X) = V(X) = \mu$$

- Approximation de la binomiale par la Poisson :

$$\text{Si } n > 50 \text{ et } p < 0.10, \text{ Bin}(n, p) \approx \text{Pois}(\mu = np)$$

EXERCICES À FAIRE DURANT LA SÉANCE DE TP

Distribution, moyenne et variance d'une variable aléatoire discrète

1. Un examen se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiples composé de 5 questions à 3 choix chacune. Un seul choix peut être fait à chaque question et il y a une seule bonne réponse à chaque question. Pour chaque réponse correcte, l'élève reçoit 3 points. Par contre, il perd 1 point pour chaque réponse incorrecte. Un étudiant décide de répondre au hasard à chacune des 5 questions. Calculez la moyenne de la variable aléatoire « résultat de l'étudiant ».

2. Une urne contient 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2 et 3 jetons numérotés 3. On tire, au hasard, successivement deux jetons sans remise. On note X la somme des chiffres des deux jetons tirés.
- Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons identiques ?
 - Quelle est la distribution de la variable X ?
 - Que valent la moyenne et l'écart type de X ?

Distribution binomiale

3. Désireux d'entretenir votre forme physique sans excès de fatigue, vous vous livrez chaque matin (du lundi au samedi inclus) au petit jeu suivant : ayant jeté un dé bien équilibré, vous vous rendez à pied à votre travail si le résultat obtenu est inférieur ou égal à 4 ; dans le cas contraire, vous restez au lit.
- Quelle est la probabilité de rester au lit ?
 - Quelle est la distribution du nombre de jours d'une semaine où vous avez « gagné » le droit de rester au lit ? Que valent la moyenne et la variance de cette variable ?
 - Calculez $P(X \leq 3)$; $P(X=4)$; $P(X < 2)$; $P(2 \leq X \leq 5)$

4. Lors d'une étude sur les revenus des employés d'une grande chaîne d'hôtels, on a constaté que 94486 employés sur 134980 ont un revenu annuel brut inférieur à 50000€.
- a. Quelle est la proportion p d'employés de cette chaîne gagnant moins de 50000€ ?
 - b. Un sondage est organisé auprès de 12 de ces employés choisis au hasard. Quelle est la distribution du nombre de salaires inférieurs à 50000€ dans cet échantillon ?
 - c. Que valent la moyenne et la variance de cette variable ?
 - d. Quelle est la probabilité que sur ces 12 employés 2 aient un salaire inférieur à 50000€ ?
 - e. Quelle est la probabilité que le nombre d'employés ayant un salaire inférieur à 50000€ soit compris entre 6 et 8 ?

Distribution de Poisson

5. Le nombre moyen d'appels parvenant à la police le samedi matin en 30 minutes est de 2 appels.
 - a. Quelle est la distribution du nombre d'appel parvenant à la police le samedi matin en deux heures?
 - b. Quelle est la probabilité qu'aucun appel ne parvienne à la police pendant ces deux heures ?
 - c. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 appels parvenant à la police pendant ces deux heures ?
 - d. Calculez l'espérance, la variance et l'écart type du nombre d'appels parvenant à la police pendant ces deux heures.

6. Les gens entrent dans un casino au rythme d'une personne toutes les deux minutes.
 - a. Quelle est la probabilité qu'il n'entre personne entre 12h et 12h05?
 - b. Quelle est la probabilité que 4 personnes au moins se présentent durant cette même période?

Approximation de la binomiale par la Poisson

7. Le taux de suicide pour un pays donné est de 1 personne pour 100000 habitants par mois.
 - a. Quelle est la probabilité qu'il y ait 8 suicides ou plus en un mois dans une ville de 400000 âmes (utiliser une approximation) ?
 - b. Quelle est la probabilité qu'au cours d'une année, le nombre de suicides mensuels dépasse 2 fois ou plus le niveau de 8 ?