EXERCICES SUR LE CHAPITRE 1 : 3ème PARTIE

Les distributions continues

FORMULES

- Distribution normale :
  $X \sim N\ (\mu, \sigma^2)$;
  $\mathrm{E(X)} = \mu\ ; V(X) = \sigma^2$
  $\mathrm{Z} = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N\ (0, 1)$
- Approximation normale de la binomiale :
  Si $np > 5$ et $np\ (1-p) > 5$: $Bin\ (n,p) \approx N\ (np, np(1-p))$
- Approximation normale de la Poisson :
  Si $\mu\ \geq 5$: $Pois\ (\mu) \approx N\ (\mu, \mu)$

EXERCICES À FAIRE À LA SÉANCE DE TP

Loi Normale et manipulation de la table N(0; 1)

1. En supposant que $Z \sim N(0,1)$, calculer à l'aide de la table appropriée :
   a. $P\ (Z < 2.1)$
   b. $P\ (Z > -0.58)$
   c. $P\ (Z < -1.56)$
   d. $P\ (Z > 1.47)$
   e. $P\ (0.36 < Z < 1.23)$
   f. $P\ (-0.88 < Z < 1.23)$
   g. $P\ (-1.78 < Z < -0.3)$

2. En supposant que $Z \sim N(0,1)$, trouver la valeur de z telle que :
   a. $P\ (Z < z) = 0.9949$
   b. $P\ (Z > z) = 0.5675$
   c. $P\ (Z < z) = 0.1251$
   d. $P\ (Z > z) = 0.0010$
   e. $P\ (z < Z < 3.4) = 0.7907$
   f. $P\ (-z < Z < z) = 0.90$

3. En supposant que les bénéfices quotidiens d'un magasin admettent la distribution normale de moyenne 1000 et d'écart-type 150, déterminez :
   a. la probabilité d'avoir un bénéfice supérieur ou égal à 1250.
   b. la probabilité d'avoir un bénéfice compris entre 1050 et 1450.
   c. la valeur des quartiles $x_{1/4}$ (càd le bénéfice minimum qui a au moins 25% de chance de se réaliser) et $x_{3/4}$ (càd tel que P(bénéf.<$x_{3/4}$)>0.75) de cette distribution.

4. Le samedi soir, la police fait un alcootest à tous les conducteurs qui passent par une route principale. On suppose que le taux d'alcool chez les automobilistes est distribuée selon une loi normale de moyenne μ = 0,07% et d'écart-type σ = 0,01%.
   a. Quelle est la proportion d'automobilistes recevant une amende (taux d'alcool supérieur à 0.08%) ?
   b. En plus de l'amende, les conducteurs ayant un taux d'alcool supérieur à 0.09% ont un retrait de permis. Parmi les conducteurs réprimandés, quelle est la proportion de retraits de permis ?
   c. L'état décrète que pour avoir suffisamment de revenus, il faut un taux de réprimande de 1/3. Sur quel taux faut-il régler les alcotests pour obtenir ce taux de réprimande.

Approximation normale de la binomiale

5. Un processus de fabrication produit des cylindres métalliques. Pour qu'un cylindre soit conforme, il faut que sa longueur (L) soit comprise entre 8.4 cm et 8.615 cm et que son diamètre (D) soit compris entre 1.5404 cm et 1.5886 cm. Le processus de fabrication est tel que la longueur des cylindres est distribuée selon une loi normale N(8.54 ; 0.0025) et leur diamètre selon une loi normale (indépendante de la précédente) N(1.57 ; 0.0001).
   a. Quelle est la probabilité qu'un cylindre prélevé au hasard dans la production soit conforme ?
   b. Quelle est la probabilité qu'un lot de 7 cylindres prélevés au hasard dans la production contienne au plus 1 cylindre non conforme ?
   c. Quelle est la probabilité qu'un lot de 700 cylindres prélevés au hasard dans la production contienne au plus 90 cylindres non conforme ?

6. Un texte de 1000 caractères est donné à dactylographier à une apprentie secrétaire. La probabilité que celle-ci fasse une erreur de frappe est de 0.04 par caractère.
   a. Quelle est la probabilité de trouver dans le texte 30 erreurs au moins ?
   b. Donnez l'intervalle (centré sur la moyenne) dans lequel se trouvera le nombre de fautes commises par cette apprentie avec une probabilité de 0.8 ?

Approximation normale de la Poisson

7. On s'intéresse aux accidents dus à des brûlures provoquées par de l'acide sulfurique. Supposons que le nombre annuel de tels accidents suit une loi de Poisson de paramètre 100. Déterminez la probabilité qu'une certaine année, il y ait plus de 130 accidents.

EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

Loi Normale et manipulation de la table N(0; 1)

1. En supposant que $Z \sim N(0,1)$, calculer à l'aide de la table appropriée :
   a. P (Z < 2.4)
   b. P (Z < - 1.8)
   c. P (Z > 1.12)
   d. P (Z > - 0.46)
   e. P (1.14 <Z <2.23)
   f. P (-1.88<Z <0.22)
   g. P (-2.01<Z <-0.78)

2. En supposant que $Z \sim N(0,1)$, trouver la valeur de z telle que :
   a. P (Z < z) = 0.9744
   b. P (Z < z) = 0.025
   c. P (Z > z) = 0.75
   d. P (Z < z) = 0.3409

3. On suppose que la durée de vie (en heures) d'une pile d'un certain type suit une loi normale N(40 ;4.41).
   a. Quelle est la probabilité qu'une pile de ce type dure plus de 41 heures et 30 minutes ?
   b. Quelle est la durée minimale d qui a au plus 2% de chances d'être dépassée par une pile de ce type ?

4. Sachant que la taille des êtres humains suit approximativement une loi normale de moyenne 171 cm et d'écart-type 10 cm, calculez :
   a. le pourcentage de personne de plus de 178 cm.
   b. le pourcentage de personnes ayant un taille comprise entre 160 et 165 cm.

5. Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots de vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. Une étude effectuée auprès d'un millier de jeunes enfants montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à 11,5 mois avec un écart-type de 3,2 mois. La distribution des âges étant normale, on souhaite :
   a. Évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant 10 mois.
   b. Évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après 18 mois.
   c. Évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots entre 8 et 12 mois.
   d. Déterminer les valeurs entre lesquelles on retrouve 50% centré sur la moyenne des âges d'apparition des premiers mots de vocabulaire.

6. Dans un pays donné, le taux de cholestérol d'un individu pris au hasard est modélisé par une loi normale avec une moyenne de 200mg/100mL et un écart-type de 20mg/100mL.
   a. Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard dans ce pays ait un taux de cholestérol inférieur à 160mg/100mL ?
   b. Quelle proportion de la population a un taux de cholestérol compris entre 170 et 230mg/100mL ?

c. Dans un autre pays, le taux moyen de cholestérol est de 190mg/100mL, pour le même écart-type. Reprendre les questions précédentes.

d. Dans le premier pays, pour réaliser une étude sur les individus extrêmes (par rapport à leur taux de cholestérol), on cherche à déterminer les valeurs situées à 2 écarts-types de la moyenne (c'est-à-dire les limites qui permettent de distinguer les 2.5% d'individus avec le moins de cholestérol et les 2.5% d'individus avec le plus de cholestérol).

Approximation normale de la binomiale

7. Une compagnie d'assurance envisage de couvrir un risque dont la probabilité s'élève à 1%. 600 adhérents accèdent à ce nouveau service.
   a. Quelle est la distribution du nombre adhérents sinistrés ?
   b. Calculer la probabilité qu'aucun n'adhérent ne soit sinistré ?
   c. A l'aide d'une approximation adéquate, calculer la probabilité que moins de 10 adhérents soient sinistrés ?

8. Supposons qu'un sondage soit organisé aux USA auprès d'adultes (18 ans et plus). On sait, d'après un recensement, que 23772494 des 209128094 adultes se qualifient comme étant "noir" (ou "afro-américain").
   a. Quelle est la proportion p de noirs aux USA?
   b. Un sondage est organisé auprès de 1500 adultes choisis au hasard. Quelle est la distribution du nombre de noirs dans cet échantillon? Que valent la moyenne et la variance de cette variable aléatoire?
   c. Si une approximation le permet (vérifier), calculer la probabilité que l'échantillon contienne au moins 170 noirs.

9. Une étude a été menée pour évaluer les capacités humaines de perception extra-sensorielle. A cette fin, le maître de cérémonie dispose de 30 cartes portant un des quatre symboles habituels (pic, cœur, trèfle ou carreau). Il est demandé à chaque personne testée de deviner, un par un, le symbole sur chacune des 30 cartes. (La proportion de carte de chaque type n'est pas annoncée).
   a. Si la personne testée ne dispose d'aucun don particulier en ce domaine, quelle est la probabilité qu'il annonce le symbole correct pour une carte donnée? Quelle est la distribution du nombre de cartes correctement classées?
   b. En utilisant l'approximation normale (vérifier les conditions), calculer la probabilité qu'un sujet sans don particulier donne un résultat correct pour au moins 15 des 30 cartes.
   c. Calculer les quantiles 2.5% et 97.5% de cette approximation normale. En déduire dans quel intervalle on retrouve 95% du nombre de symboles correctement devinés par des individus sans don particulier.