

Estimation d'une proportion

1. En temps normal dans une usine de production de bois qui possède 250 machines, la probabilité qu'une machine tombe en panne dans une journée de travail (π) est de 0,01. Un jour, on a observé que parmi 250 appareils, 4 appareils sont tombés en panne.
 - a. Déterminez la densité a posteriori de π connaissant cet événement.
 - b. Déterminez si cet événement indique que la production n'est plus sous contrôle.
 - c. Déterminez un ensemble de valeurs plausibles pour π .

2. L'association des fabricants d'automobiles des Etats-Unis relate dans son périodique 'Motor Vehicle Facts and Figures' que, en 1962, parmi toutes les ventes de voitures aux USA, 4.8% sont des voitures étrangères. En 1983, le pourcentage était 27.8%. Du coup, les fabricants américains ont implémenté différentes règles permettant de réduire les coûts de manière à concurrencer les voitures d'importation. Parmi un échantillon de 500 voitures vendues en 1991, 128 sont des voitures d'importation.
 - a. Ces données suggèrent-elles que le pourcentage de voitures étrangères vendues a diminué entre 1983 et 1991 où ce pourcentage valait 27.8%?
 - b. Déterminer un ensemble de valeurs plausibles pour la proportion de voitures étrangères vendues en 1991.
 - c. Supposons que cette proportion de voitures d'importation vendues aux USA soit de nouveau étudiée sur l'année 1992 et que l'on obtienne que parmi un échantillon de 800 voitures, 172 sont des voitures d'importation. Cette nouvelle donnée suggère-t-elle que le pourcentage de voitures étrangères vendues a diminué entre 1983 et 1992 ?

3. Il est communément admis que dans une bibliothèque, environ 10% des livres se détériorent chaque année. Le suivi spécifique de 400 livres durant une année a révélé 36 détériorations.
 - a. Que vaut la probabilité (a posteriori) qu'au plus 10% des livres de la bibliothèque ont subi des détériorations cette année-là ?
 - b. Donnez un ensemble de valeurs plausibles pour cette probabilité.

Supposons que l'année suivante sur un échantillon de 300 livres suivis, on sache que 6% de livres aient subi des détériorations.

- c. En supposant que le pourcentage de détérioration soit stable sur les 2 années, répondez de nouveau aux questions a) et b).

4. Supposons que le taux de mortalité, calculé dans un échantillon d'effectif 100 de personnes touchées par une certaine maladie, soit de 0,13. Soit π , cette probabilité de décès au niveau de la population.
 - a. Ces données suggèrent-elles que la probabilité de mourir pour toutes les personnes touchées par cette maladie (π) soit supérieure à 0,1?
 - b. Répondre à la question en raisonnant à partir d'un ensemble de valeurs plausibles pour cette probabilité.

Comparaison de deux proportions – échantillons indépendants

5. Un vaccin antigrippal classique est administré à 50 personnes sélectionnées aléatoirement. Dix d'entre elles sont néanmoins grippées l'hiver suivant. Simultanément, un nouveau vaccin est mis sur le marché et testé sur 50 personnes sélectionnées également de façon aléatoire. Cinq parmi celles-ci sont grippées l'hiver suivant. Peut-on affirmer que le nouveau vaccin est plus efficace? Répondez à la question de deux façons différentes.
6. Aux Etats-Unis le « U.S. Energy Information Administration » effectue des études afin d'estimer le pourcentage de ménages américains possédant différents appareils. Les résultats de ces études peuvent être trouvés dans « Residential Energy Consumption Survey: Housing Characteristics ». Euromonitor Publications Limited, London, England conduit des études similaires dans d'autres pays et publie leurs résultats dans « European Marketing Data and Statistics ». Supposons que hors d'un échantillon aléatoire de 500 ménages Américains, 370 possèdent leur propre machine à lessiver et que hors d'un échantillon aléatoire de 450 ménages Français, 365 possèdent cet appareil.
- Ces données suggèrent-elles une différence entre les pourcentages de ménages Américains et Français possédant une machine à lessiver?
 - Donner un ensemble de valeurs plausibles pour cette différence de pourcentages.

RÉPONSES EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

Exercice 1.

- $(\pi|D) \sim \text{Beta}(5,427) \approx N(0.016; 0.000063)$
- $P(\pi > 0.01|D) = 0.7765 < 0.95 \rightarrow$ non, on ne peut pas dire que la production n'est plus sous contrôle avec les données à disposition.
- IC 95% pour π : $[0.0004; 0.0315] \ni 0.01$: même conclusion point b).

Exercice 2.

- $P(\pi_{91} < 0.278|D) = 0.8708 < 0.95 \rightarrow$ non, on ne peut pas affirmer que le pourcentage de voitures étrangères vendues a diminué entre 1983 et 1991 avec les données à disposition.
- IC 95% pour π : $[0.218; 0.294] \ni 0.278$: même conclusion point a).
- (Indice : a priori informatif pour $\pi_{92} = a \text{ posteriori de } \pi_{91}$)
 $P(\pi_{92} < 0.278|D) > 0.9998 > 0.95 \rightarrow$ on conclut que l'affirmation est vraie.

Exercice 3.

- $P(\pi < 0.1|D) = 0.7580 < 0.95 \rightarrow$ non, on ne peut pas affirmer que le pourcentage de détérioration soit inférieur à 10% avec les données à disposition.
- IC 95% pour π : $[0.062; 0.118] \ni 0.1$: même conclusion point a).
- (Indice : a priori informatif)
- $P(\pi < 0.18|D) = 0.9884 > 0.95 \rightarrow$ cette fois, on peut conclure que le pourcentage de détérioration est inférieur à 10%. IC 95% pour π : $[0.057; 0.097] < 0.1$: même conclusion.

Exercice 4.

- a) $P(\pi > 0.1|D) = 0.8133 \rightarrow$ non, on ne peut pas affirmer que la probabilité de mourir dans la population des malades soit supérieure à 0.1 avec les données à disposition.
- b) IC 95% pour π : $[0.064 ; 0.196] \ni 0.1$: même conclusion point a).

Exercice 5.

$P(\delta = \pi_2 - \pi_1 < 0|D) = 0.9207 \rightarrow (<0.95)$ non, on ne peut pas affirmer que le nouveau vaccin soit plus efficace avec les données à disposition.

IC 95% pour $\delta = \pi_2 - \pi_1$: $[-0.24; 0.04] \ni 0$: même conclusion.

Exercice 6.

- a) $P(\delta = \pi_F - \pi_A > 0|D) = 0.9953 \rightarrow (>0.95)$ oui, la proportion de ménages français possédant une machine à lessiver est significativement supérieure à celle de ménages américains possédant un tel électroménager.
- b) IC 95% pour $\delta = \pi_F - \pi_A$: $[0.017; 0.123] \not\ni 0$: même conclusion $\pi_F > \pi_A$