Statistique descriptive : Exercices supplémentaires
Introduction à la théorie des probabilités

1. Lors du lancer d'un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, quelle est la probabilité d'obtenir :
   (a) le nombre quatre ?
   (b) un nombre pair ?
   (c) un nombre inférieur ou égal à 2 ?

   Réponses :
   (a) 1/6
   (b) 1/2
   (c) 1/3
2. Lors du lancer d'un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, quelle est la probabilité d'obtenir :
   (a) le nombre cinq ?
   (b) un nombre impair ?
   (c) un nombre supérieur ou égal à 2 ?
   (d) le nombre six sachant que le lancer précédent a donné six ?
   (e) le nombre six sachant que les dix lancers précédents ont donné six ?

   Réponses :
   (a) 1/6
   (b) 1/2
   (c) 5/6
   (d) 1/6
   (e) Si l'on considère toujours que le dès est équilibré : 1/6
3. La distribution de la couleur des cheveux en Europe est de

Couleur des cheveux	Blond	Roux	Chatain	Noir
Probabilité	0.27	0.08	0.41	?

   (a) Quelle est la probabilité d'avoir des cheveux noirs ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'un européen pris au hasard soit blond ou chatain ?
   (c) Quelle est la probabilité que deux européens choisis indépendamment et au hasard aient la même couleur de cheveux et soient tous les deux soit blond soit châtain ?
   (d) Quelle est la probabilité que deux européens choisis indépendamment et au hasard soient tous les deux soit blond soit châtain ?
   (e) Si Nathalie a les cheveux blond, quelle est la probabilité que son mari, David ait les cheveux roux ?

   Réponses :

(a) 0.24
(b) 0.68
(c) 0.241
(d) 0.4624
(e) 0.08

4. La distribution de la couleur des cheveux en Asie est de

Couleur des cheveux	Blond	Roux	Chatain	Noir
Probabilité	0.05	0.01	0.17	0.77

Si un européen et un asiatique sont choisis indépendamment et au hasard

(a) Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux noirs de cheveux ?
(b) Quelle est la probabilité qu'ils aient la même couleur de cheveux ?
(c) Quelle est la probabilité qu'ils n'aient pas la même couleur de cheveux ?

Réponses :

(a) 0.1848
(b) 0.2688
(c) 0.7312

5. La distribution des catégories de travail parmi la population active de Belgique est donnée dans le tableau ci-dessous

Catégories d'activités	Ouvrier	Employé	Fonctionnaire	Indépendant
Probabilités	0.27	0.36	0.24	?

Lors de la constitution d'un jury d'Assises, on tire aléatoirement et indépendamment des individus hors de cette population.

(a) Quelle est la probabilité d'être indépendant ?
(b) Quelle est la probabilité qu'un membre du jury tiré au hasard soit salarié (c'est-à-dire ouvrier ou employé) ?
(c) Quelle est la probabilité que deux membres tirés au hasard soient tous les deux salariés ?
(d) Si le premier membre du jury est fonctionnaire, quelle est la probabilité que le second le soit aussi ?
(e) Si les dix premiers sont fonctionnaires, quelle est la probabilité que le suivant le soit aussi ?

Réponses :

(a) 0.13
(b) 0.63
(c) 0.3969
(d) 0.24
(e) Si l'on maintient toujours l'hypothèse d'indépendance entre les tirages : 0.24

6. La distribution des catégories de travail parmi la population active au Luxembourg est donnée dans le tableau ci-dessous

Catégories d'activités	Ouvrier	Employé	Fonctionnaire	Indépendant
Probabilités	0.12	0.42	0.17	0.29

Si un belge et un luxembourgeois sont choisis indépendamment et au hasard

(a) Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux ouvriers ?

(b) Quelle est la probabilité qu'ils aient la même catégorie de travail ?

(c) Quelle est la probabilité qu'ils n'aient pas la même catégorie de travail ?

Réponses :

(a) 0.0324

(b) 0.2621

(c) 0.7379

7. Un organisation de consommateurs comportent 1200 membres sont la répartition est la suivante

	Hommes	Femmes	Total
Campagne	180	162	342
Banlieue	285	318	603
Centre-Ville	105	150	255
Total	570	630	1200

Supposons qu'un consommateur soit choisi au hasard.

(a) Quelle est la probabilité qu'il soit un homme ?

(b) Quelle est la probabilité qu'il vive en centre-ville ?

(c) Quelle est la probabilité que ce soit une femme de banlieue ?

(d) Sachant qu'il s'agit d'une femme, quelle est la probabilité qu'elle habite en banlieue ?

(e) Sachant que cette personne habite à la campagne, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme ?

Réponses :

(a) 0.475

(b) 0.2125

(c) 0.265

(d) 0.505

(e) 0.526

8. Un sondage a été réalisé auprès de 1000 américains à propos de leur avis sur le port d'arme. Voici comment ils se répartissent en fonction de leur tendance politique :

	Pour le port d'arme	Contre le port d'arme	Total
Démocrate	200	270	470
Républicain	300	110	410
Indécis	60	60	120
Total	560	440	1000

Supposons qu'un américain soit choisi au hasard.

(a) Quelle est la probabilité qu'il soit démocrate ?
(b) Quelle est la probabilité qu'il soit en faveur du port d'arme ?
(c) Quelle est la probabilité que ce soit un républicain contre le port d'arme ?
(d) Sachant qu'il s'agit d'un républicain, quelle est la probabilité qu'il soit contre le port d'arme ?
(e) Sachant que cette personne est pour le port d'arme, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un indécis ?

Réponses :

(a) 0.47
(b) 0.56
(c) 0.11
(d) 0.268
(e) 0.107

9. Une étude menée dans plusieurs hôpitaux a montré que 3 naissances sur 275 donnent des jumeaux et qu'une fois sur trois, il s'agit de vrais jumeaux. De plus, les vrais jumeaux sont toujours de même sexe, tandis que les faux jumeaux peuvent être soit de même sexe, soit de sexes opposés. On suppose que les deux sexes sont équiprobables.

   (a) Quelle est la distribution du sexe pour les faux jumeaux ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'une femme enceinte attendent de vrais jumeaux ?
   (c) Sachant que des jumeaux ont le même sexe, quelle est la probabilité que ce soient de vrais jumeaux ?

   Réponses :

   (a) {"deux filles" (0.25), "deux garçons" (0.25), "une fille et un garçon" (0.5)}
   (b) 1/275
   (c) 0.5

10. Deux urnes contiennent chacune 2 boules rouges, 4 boules vertes et 4 noires.

   (a) Quelle est la distribution du tirage d'une boule dans une des deux urnes ?
   (b) On tire une boule dans chaque urne, quelle est la distribution de la paire obtenue ?
   (c) On associe un gain de 4 euros au tirage d'une boule rouge, un gain de 1 euro au tirage d'une boule verte et une perte de 2 euros au tirage d'une boule noire. Quelle est la moyenne de gain (ou perte) ?
   (d) Quelle est la variance ?
   (e) Quelle est la moyenne de gain associée au tirage d'une boule par urne ? Trouver la réponse par deux méthodes ; en exploitant le fait que le total des gains est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et en utilisant la distribution de probabilités obtenues en 10b.

   Réponses :

   (a) {"rouge" (0.2), "noir" (0.4), "vert" (0.4)}

(b) {"RR" (1/25), "RV" (4/25), "RN" (4/25), "VV" (4/25), "NN" (4/25), "NV" (8/25)}

(c) 0.4 euros

(d) 5.04 euros^2

(e) 0.8 euros

11. Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme fait 7 ou le produit 6, Aurélie marque un point ; quand la somme est 6 ou le produit 5, Nicolas marque un point.

    (a) Lequel des deux à la plus grande chance de gagner ?

    (b) Si vous deviez parier sur ce jeu selon les conditions suivantes : Vous payer 20 euros d'entrée et vous en recevez 100 si vous faites le bon pronostique (Aurélie, Nicolas ou bien aucun des deux). Quel pronostique permet de maximiser votre gain espéré ? Calculer aussi la variance de ce gain.

    (c) Si l'on lance les 2 dés en même temps, quelle est la distribution de la somme ? Calculez-en l'espérance et la variance.

    Réponses :

    (a) Nicolas à 5 chances sur 36 de gagner tandi qu'Aurélie a 8 chances sur 36 de gagner.

    (b) Si l'on dit que c'est Aurélie qui va gagner, notre espérance de gain vaut 2.22 euros. Si l'on parie sur Nicolas, l'espérance de gain vaut -6.71 euros. Et enfin, si l'on dit qu'il vont perdre tout les deux, on peut espérer gagner 43.89 euros. Il s'agit donc de la stratégie la plus intéressante. La variance de gain de cette stratégie vaut 2562.918 euros^2.

    (c) Le tableau ci-dessous donne la distribution de la somme des deux dès :

Valeur	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Proba	1/21	1/21	2/21	2/21	3/21	3/21	3/21	2/21	2/21	1/21	1/21

    L'espérance vaut donc 7 et la variance est de 6.67

12. Le Sultan dit à Ali Baba : "Voici 2 urnes, 4 boules blanches et 4 noires. Répartis les boules dans les urnes comme tu le souhaites, mais ensuite, je les rendrai indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche hors d'une des 2 urnes."

    (a) Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 4 boules blanches dans la première urne et les 4 noires dans la seconde ?

    (b) Idem avec deux boules blanches et deux boules noires dans chaque urne.

    (c) Idem avec 3 boules blanches dans la première urne et les autres dans la seconde.

    (d) Comment Ali Baba peut-il maximiser ses chances de survie ?

    Réponses :

    (a) 1/2

    (b) 1/2

    (c) 3/5

    (d) Il faut mettre une boule blanche dans la première urne et toutes les autres boules dans la seconde. Cela donne une probabilité de s'en tirer de 5/7.

13. En supposant que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, calculer à l'aide de la table appropriée
    (a) $P(Z < 2.4)$;
    (b) $P(Z < -1.8)$;
    (c) $P(Z > 1.12)$;
    (d) $P(Z > -0.46)$.

    Réponses :
    (a) 0.9918
    (b) 0.0359
    (c) 0.1314
    (d) 0.6772
14. En supposant que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, trouver la valeur de z telle que
    (a) $P(Z < z) = 0.9744$
    (b) $P(Z < z) = 0.025$
    (c) $P(Z > z) = 0.75$

    Réponses :
    (a) $z = 1.95$
    (b) $z = -1.96$
    (c) $z = 0.75$
15. Sachant que la taille des êtres humains suit approximativement une loi normale de moyenne 171 cm et d'écart-type 10 cm, calculer
    (a) le pourcentage de personne de plus de 178 cm ;
    (b) le pourcentage de personnes ayant un taille comprise entre 160 et 165 cm.

    Réponses :
    (a) 0.242
    (b) 0.1386
16. Sachant que la taille, en centimètre, d'un pygmée âgé de 25 ans est une variable aléatoire normale de moyenne 140 cm et d'écart-type 6 cm, calculer
    (a) le pourcentage de pygmées de 25 ans ayant une taille supérieure à 150 cm ;
    (b) le pourcentage de pygmées de 25 ans ayant un taille comprise entre 135 et 140 cm.
    (c) Parmi les pygmées de 25 ans mesurant plus de 145 cm, quel pourcentage dépasse 150 cm ?
    (d) Donner un intervalle de confiance centré sur la moyenne et comprenant 80% des pygmées de 25 ans.

    Réponses :
    (a) 0.0475
    (b) 0.2967
    (c) 0.2336
    (d) IC=[132.32,147.68]

17. Lors d'une étude sur les revenus des employés d'une grande chaine d'hotels, on a constaté que 94486 employés sur 134980 ont un revenu annuel brut inférieur à 50000 Euros.
    (a) Quelle est la proportion p d'employés de cette chaine gagnant moins de 50000 Euros ?
    (b) Un sondage est organisé auprès de 12 de ces employés choisis au hasard. Quelle est la distribution du nombre de salaires inférieurs à 50000 Euros dans cet échantillon ?
    (c) Que valent la moyenne et la variance de cette variable ?
    (d) Quelle est la probabilité que sur ces 12 employés 2 aient un salaire inférieur à 50000 Euros ?
    (e) Quelle est la probabilité que le nombre d'employés ayant un salaire inférieur à 50000 Euros soit compris entre 6 et 8 ?

    Réponses :
    (a) $p = 0.7$
    (b) $\text{Bin}(12; 0.7)$
    (c) $E[X] = 8.4$ et $V[X] = 2.52$
    (d) 0.00019
    (e) 0.4688
18. Différentes compagnies aériennes ont recensé le nombre de passagers réservant un vol mais n'y embarquant finalement pas. Sur un total de 2648640 passagers, ce nombre s'élevait à 132432. A la suite de cette étude, SA Airlines vend toujours 94 billets pour ses avions de 90 sièges.
    (a) Quelle est la proportion p de passagers réservant un vol mais n'y embarquant finalement pas ?
    (b) Donner la distribution du nombre de ces passagers pour la compagnie SA Airlines.
    (c) Que valent la moyenne et la variance de cette variable aléatoire ?
    (d) Quelle est la probabilité que deux passagers exactement doivent rester à l'aéroport (faute de place dans l'avion) ?
    (e) Quelle est la probabilité que l'avion sans plein sans devoir laisser des gens à l'aéroport ?
    (f) Quelle est la probabilité qu'un passager ne puisse pas embarquer sur le vol ?

    Réponses :
    (a) $p = 0.05$
    (b) $Y_{SA} \sim \text{Bin}(94, 0.05)$
    (c) $E[Y_{SA}] = 4.7$ et $V[Y_{SA}] = 4.465$
    (d) 0.098
    (e) 0.182
    (f) 0.303
19. Les cotes obtenues lors d'un examen de mathématique sont distribuées normalement avec $\mu = 12$ et $\sigma = 3,5$.
    (a) Quelle est la moyenne des cotes obtenues ? Quelle est sa variance ?

(b) Quelle est la probabilité de réussite de cet examen (cote supérieure ou égale à 10) ?

(c) Quelle cote doit être considérée comme cote d'exclusion pour avoir un taux d'échec inférieur à 25% ?

Réponses :

(a) $\mu = 12$, $\sigma^2 = 3.5^2$

(b) 0.7157

(c) 9.6375

20. Le samedi soir, la police fait un alcootest à tous les conducteurs qui passent par une route principale. On suppose que le taux d'alcool chez les automobilistes est distribuée selon une loi normale d'espérance $\mu = 0.07\%$ et d'écart-type $\sigma = 0.01\%$.

(a) Quelle est la proportion d'automobilistes recevant une amende (taux d'alcool supérieur à 0.08%) ?

(b) En plus de l'amende, les conducteurs ayant un taux d'alcool supérieur à 0.09% ont un retrait de permis. Parmi les conducteurs reprimandés, quelle est la proportion de retraits de permis ?

(c) L'état décrète que pour avoir suffisamment de revenus, il faut un taux de réprimande de 1/3. Sur quel taux faut-il réglé les alcootest pour obtenir ce taux de réprimande ?

Réponses :

(a) 0.1587

(b) 0.0228

(c) Il faudrait que la limite soit à 0.0743%.

21. Une compagnie d'assurance envisage de couvrir un risque dont la probabilité s'élève à 1%. 600 adhérents accèdent à ce nouveau service.

(a) Quelle est la distribution du nombre adhérents sinistrés ?

(b) Calculer la probabilité qu'aucun n'adhérent ne soit sinistré ?

(c) A l'aide d'une approximation adéquate, calculer la probabilité que moins de 10 adhérents soient sinistrés ?

Réponses :

(a) $\mathrm{Bin}(600; 0.01)$

(b) très proche de zéro

(c) 0.9678

22. (a) Nadine part à la cueillette de champignons. Elle ne sait pas faire la différence entre un champignon comestible et un champignon toxique. On estime que la proportion de champignons toxiques se trouvant dans les bois s'élève à 0.7. Nadine ramasse 6 champignons au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle ramasse exactement 4 champignons toxiques ?

(b) Nadine invite Serge à une cueillette. Serge connaît bien les champignons parce que son papa est restaurateur et qu'ils vont souvent en chercher ensemble pour le restaurant. On peut estimer que sur 10 champignons ramassés par Serge, 9 sont comestibles. Ce jour-là, Serge ramasse 5 champignons. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous comestibles ?

(c) Un autre jour, Serge accompagne son papa à la cueillette. Pour les besoins du menu du soir, ils doivent cueillir 120 champignons. Sous l'oeil avisé de son papa, Serge ne ramasse maintenant plus que 1 champignon toxique sur 20 cueillis. A l'aide d'une approximation adéquate, calculer la probabilité que le nombre de champignons toxiques cueillis soit inférieur ou égal à 1.

Réponses :

(a) 0.324

(b) 0.59

(c) 0.9893