

Exercices supplémentaires sur les probabilités (chapitre 2)

(Exercices des années 2008, 2009 et 2010 non proposés en 2011. NB : certains exercices des années précédentes portent sur des points la matière qui ont été supprimés cette année. Il est donc normal que vous ne sachiez pas réaliser tous les exercices proposés ces années-là (disponibles sur le site <http://www.statsoc.ulg.ac.be/statdescr.html>). Ci-dessous, vous trouverez uniquement les exercices qui portent sur des points de la matière que vous devez maîtriser cette année pour l'examen).

Les exercices marqués de *** sont plus fortement conseillés

1. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer :
 - a. le roi de cœur ? (rép : 0.02)
 - b. une dame ? (rép : 0.08)
 - c. une carte qui ne soit pas un nombre ? (rép : 0.23)
 - d. une carte portant un nombre impair de points ou un roi ? (rép : 0.46)
 - e. une carte de trèfle ou un valet ? (rép : 0.31)
 - f. une carte de carreau et une figure ? (rép : 0.06)

2. Lors du lancer d'un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, quelle est la probabilité d'obtenir :
 - a. le nombre quatre ? (rép : 1.67)
 - b. un nombre pair ? (rép : 0.5)
 - c. un nombre inférieur ou égal à 2 ? (rép : 0.33)

3. La distribution des groupes sanguins aux USA est :

Groupe sanguin	O	A	B	AB
Probabilité	0.45	0.40	0.11	?

- a. Que vaut $P(AB)$? (rép : 0.04).
 - b. Maria est du groupe B. Elle peut recevoir une transfusion des personnes des groupes O et B. Quelle est la probabilité qu'un Américain choisi au hasard puisse lui donner du sang sans risque? (rép : 0.56).

4. La distribution des groupes sanguins en Chine est donnée par :

Groupe sanguin	O	A	B	AB
Probabilité	0.35	0.27	0.26	0.12

Si un Américain (*utiliser les données de l'exercice précédent*) et un Chinois sont choisis indépendamment et au hasard,

- a. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux du groupe O? (Rép: 0.1575).
 - b. Quelle est la probabilité qu'ils appartiennent au même groupe sanguin? (Rép: 0.2989).

5. *** La distribution de la couleur des cheveux en Europe est :

Couleur des cheveux	Blond	Roux	Châtain	Noir
Probabilité	0.27	0.08	0.41	?

- Quelle est la probabilité d'avoir des cheveux noirs ? (rép : 0.24)
- Quelle est la probabilité qu'un européen pris au hasard soit blond ou châtain ? (rép : 0.68)
- Quelle est la probabilité que deux européens choisis indépendamment et au hasard aient la même couleur de cheveux et soient tous les deux soit blond soit châtain ? (rép : 0.241)
- Quelle est la probabilité que deux européens choisis indépendamment et au hasard soient tous les deux soit blond soit châtain ? (rép : 0.4624)
- Si Nathalie a les cheveux blond, quelle est la probabilité que son mari, David ait les cheveux roux ? (rép : 0.08)

6. *** La distribution de la couleur des cheveux en Asie est :

Couleur des cheveux	Blond	Roux	Châtain	Noir
Probabilité	0.05	0.01	0.17	0.77

Si un européen (*utiliser les données de l'exercice précédent*) et un asiatique sont choisis indépendamment et au hasard

- Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux noirs de cheveux ? (rép : 0.1848)
- Quelle est la probabilité qu'ils aient la même couleur de cheveux ? (rép : 0.2688)
- Quelle est la probabilité qu'ils n'aient pas la même couleur de cheveux ? (rép : 0.7312)

7. La distribution des catégories de travail parmi la population active de Belgique est donnée dans le tableau ci-dessous :

Catégories d'activités	Ouvrier	Employé	Fonctionnaire	Indépendant
Probabilités	0.27	0.36	0.24	?

Lors de la constitution d'un jury d'Assises, on tire aléatoirement et indépendamment des individus hors de cette population.

- Quelle est la probabilité d'être indépendant ? (rép : 0.13)
- Quelle est la probabilité qu'un membre du jury tiré au hasard soit salarié (c'est-à-dire ouvrier ou employé) ? (rép : 0.63)
- Quelle est la probabilité que deux membres tirés au hasard soient tous les deux salariés ? (rép : 0.3969)

- d. Si le premier membre du jury est fonctionnaire, quelle est la probabilité que le second le soit aussi ? (rép : 0.24)
- e. Si les dix premiers sont fonctionnaires, quelle est la probabilité que le suivant le soit aussi ? (rép : 0.24).

8. La distribution des catégories de travail parmi la population active au Luxembourg est donnée dans le tableau ci-dessous :

Catégories d'activités	Ouvrier	Employé	Fonctionnaire	Indépendant
Probabilités	0.12	0.42	0.17	0.29

Si un belge et un luxembourgeois sont choisis indépendamment et au hasard

- a. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux ouvriers ? (rép : 0.0324).
- b. Quelle est la probabilité qu'ils aient la même catégorie de travail ? (rép : 0.2621).
- c. Quelle est la probabilité qu'ils n'aient pas la même catégorie de travail ? (rép : 0.7379).

9. Les couleurs les plus populaires pour les voitures aux USA sont :

Couleur	Grise	Blanche	Noire	Vert foncé	Bleu foncé	Vert moyen
Probabilité	0.176	0.172	0.113	0.089	0.088	0.067

- a. Quelle est la plausibilité que le véhicule acheté par un consommateur américain (dont on ne sait rien a priori) soit d'une autre couleur que les six citées? (R: 0.295).
- b. Quelle est la plausibilité que le véhicule de cet Américain soit gris ou blanc? (R: 0.348).
- c. *** Quelle est la plausibilité que deux Américains (dont on ne sait rien d'autre a priori que ce qui suit) possédant chacun un véhicule aient tous les deux une voiture de couleur grise ou blanche? (R: 0.121104)

10. Une classe de 115 étudiants se compose des quatre groupes suivants :

	Garçons	Filles	Total
Physique	42	23	65
Mathématique	13	37	50
Total	55	60	115

On choisit un étudiant au hasard comme délégué de classe.

- a. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ? (rép : 0,48)
- b. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? (rép : 0,52)
- c. Quelle est la probabilité que ce soit un(e) étudiant(e) de physique ? (rép : 0,57)
- d. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon inscrit en mathématique ? (rép : 0,11)

- e. Quelle est la probabilité que ce soit un(e) étudiant(e) de physique ou un garçon ? (rép : 0,68)
- f. Quelle est la probabilité que ce soit une étudiante de physique ou un garçon ? (rép : 0,68)
- g. Quelle est la probabilité que ce soit une fille non inscrite en physique ? (rép : 0,32)
- h. Quelle est la probabilité que ce ne soit ni un(e) étudiant(e) en mathématique, ni une fille ? (rép : 0,37)
- i. Sachant qu'il s'agit d'un garçon, quelle est la probabilité qu'il soit en mathématique ? (rép : 0,24)
- j. Et s'il s'agit d'une fille ? (rép : 0,62)

11. Une organisation de consommateurs comporte 1200 membres dont la répartition est la suivante :

	Hommes	Femmes	Total
Campagne	180	162	342
Banlieue	285	318	603
Centre-Ville	105	150	255
Total	570	630	1200

Supposons qu'un consommateur soit choisi au hasard.

- a. Quelle est la probabilité qu'il soit un homme ? (rép : 0.475)
- b. Quelle est la probabilité qu'il vive en centre-ville ? (rép : 0.2125)
- c. Quelle est la probabilité que ce soit une femme de banlieue ? (rép : 0.265)
- d. Sachant qu'il s'agit d'une femme, quelle est la probabilité qu'elle habite en banlieue ? (rép : 0.505)
- e. Sachant que cette personne habite à la campagne, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme ? (rép : 0.526)
12. *** Un recensement de la population américaine révèle la répartition suivante des femmes adultes (en milliers):

	Age (en années)			Total
	18-29	30-64	≥65	
Mariée	7842	43808	8270	59920
Jamais mariée	13930	7184	751	21865
Veuve	36	2523	8385	10944
Divorcée	704	9174	1263	11141
Total	22512	62689	18669	103870

Supposons qu'une américaine adulte soit choisie au hasard.

- a. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 30 ans ? (rép : 0.217).
- b. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 30 ans et soit mariée ? (rép : 0.075).
- c. Sachant qu'elle a moins de 30 ans, quelle est la probabilité qu'elle soit mariée ? (rép : 0.348).

- d. Sachant qu'elle est mariée, quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 30 ans? (rép : 0.131).
13. *** Une compagnie démarché des acheteurs par téléphone. Elle choisit ses correspondants au hasard dans le bottin. L'expérience montre que 70% des appels n'aboutissent pas (pas de réponse ou refus de parler), 20% conduisent à une interlocutrice et 10% à un interlocuteur. Sachant que 30% des femmes et 20% des hommes engageant la discussion finissent par acheter quelque chose, quel est le pourcentage d'appels conduisant à une vente? (rép : 0.08).
14. Les électeurs d'une grande ville américaine sont constitués de 40% de blancs, 40% de noirs et 20% d'hispaniques. Un candidat noir à la fonction de Maire espère attirer 30% des votes chez les blancs, 90% chez les noirs et 50% chez les hispaniques. Quel pourcentage des votes globaux espère-t-il donc réunir? (rép : 58%).
15. *** On tire une à une 3 boules d'un sac contenant 5 boules blanches et 3 boules noires.
- Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes les 3 blanches ? (rép : 0,18)
 - Quelle est la probabilité pour qu'il y ait deux boules noires parmi les boules tirées ? (rép : 0,27)
 - Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins une boule noire parmi les boules tirées ? (rép : 0.82)
 - Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes les 3 de même couleur ? (rép : 0.20)
 - Supposons maintenant que l'on dispose de trois urnes selon cette composition et que l'on tire une boule dans chacune d'entre elles. Que deviennent les probabilités précédentes ? (rép : a. 0,24 ; b. 0,26 ; c. 0,76 ; d. 0,30)
16. Deux urnes contiennent chacune 2 boules rouges, 4 boules vertes et 4 noires.
- Quelle est la distribution du tirage d'une boule dans une des deux urnes ? (rép : {« R » (0.2) ; « N » (0.4) ; « V » (0.4)})
 - On tire une boule dans chaque urne, quelle est la distribution de la paire obtenue ? (rép : {"RR" (1/25), "RV" (4/25), "RN" (4/25), "VV" (4/25), "NN" (4/25), "NV" (8/25)})
 - On associe un gain de 4 euros au tirage d'une boule rouge, un gain de 1 euro au tirage d'une boule verte et une perte de 2 euros au tirage d'une boule noire. Quelle est la moyenne de gain (ou perte) ? (rép : 0,4€)
 - Quelle est la variance ? (rép : 5,04€²)
 - Quelle est la moyenne de gain associée au tirage d'une boule par urne ? Trouver la réponse par deux méthodes ; en exploitant le fait que le total des gains est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et en utilisant la distribution de probabilités obtenues en 10b. (rép : 0.8€)

17. Vous disposez de 2 dés équilibrés. Le premier présente sur ses faces les valeurs 1, 3, 4, 5, 6 et 8. Le deuxième présente les valeurs 1, 2, 2, 3, 3 et 4.

- a. Quelle est la distribution de probabilité pour le résultat du 1er dé? Même question pour le 2ème dé. En déduire la moyenne du résultat obtenu pour un lancer pour chacun des dés. (rép : $\mu_1 = 4.5$; $\mu_2 = 2.5$).
- b. Quelle est la distribution de probabilité de la somme des résultats obtenus par les lancers simultanés des 2 dés? (rép :
- | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |
- c. Que vaut la moyenne de la somme des résultats obtenus par les lancers simultanés des 2 dés? Trouvez la réponse par 2 méthodes: 1: en exploitant le fait que le total est la somme de 2 variables aléatoires (indépendantes) ; 2: en utilisant la distribution de probabilité obtenue en b. (rép : 7).

18. Des tickets de loterie sont vendus un euro. Un ticket sur 1000 est gagnant et rapporte une somme de 500 euros ; tous les autres sont perdants.

- a. Quelle est la distribution de la variable aléatoire X (=gain brut ne tenant pas compte de la mise de départ)? (rép : {0; 500} avec probabilités associées : 0.999 et 0.001).
- b. Que valent la moyenne et la variance de X? (rép : $\mu_x = 0.5$; $\sigma^2 x = 249.75$).
- c. Que valent la moyenne et la variance du gain net W (obtenu en soustrayant le coût du ticket du gain brut)? (rép : $\mu_w = -0.5$; $\sigma^2 w = 249.75$).
- d. Que valent la moyenne et l'écart-type du gain brut $Z = X_1 + X_2$ résultant de l'achat de 2 tickets? (rép : $\mu_z = 1$; $\sigma^2 z = 22.35$).

19. Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme fait 7 ou le produit 6, Aurélie marque un point ; quand la somme est 6 ou le produit 5, Nicolas marque un point.

- a. Lequel des deux à la plus grande chance de gagner ? (Rép : Aurélie : 8 chances/36 Vs Nicolas : 5 chances/36)
- b. Si vous deviez parier sur ce jeu selon les conditions suivantes : Vous payer 20 euros d'entrée et vous en recevez 100 si vous faites le bon pronostique (Aurélie, Nicolas ou bien aucun des deux). Quel pronostique permet de maximiser votre gain espéré ? Calculer aussi la variance de ce gain. (Rép : Si l'on dit que c'est Aurélie qui va gagner, notre espérance de gain vaut 2.22 euros. Si l'on parie sur Nicolas, l'espérance de gain vaut -6.71 euros. Et enfin, si l'on dit qu'ils vont perdre tous les deux, on peut espérer gagner 43.89 euros. Il s'agit donc de la stratégie la plus intéressante. La variance de gain de cette stratégie vaut 2562.918 euros²).
- c. Si l'on lance les 2 dés en même temps, quelle est la distribution de la somme des 2 dés ? Calculez-en l'espérance et la variance. (rép :

Valeur	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	1/21	1/21	2/21	2/21	3/21	3/21	3/21	2/21	2/21	1/21	1/21

Espérance = 7 ; Variance = 6.67).

20. *** En supposant que vous soyez au rez-de-chaussée d'un immeuble de 8 étages, que vous y attendiez un ascenseur, qui ne se trouve pas là et qui peut se trouver à n'importe quel étage avec une même probabilité, combien de temps devrez-vous attendre en moyenne si l'ascenseur met 5 secondes pour passer d'un étage à l'autre (son démarrage et son arrêt étant considérés comme instantanés) ? Quel est l'écart-type de votre temps d'attente ? (rép : $E(X) = 22,5$ secondes ; écart-type = 11,46)
21. *** En supposant que $Z \sim N(0,1)$, calculer à l'aide de la table appropriée :
- $P(Z < 2.1)$ (rép : 0.9821)
 - $P(Z > -0.58)$ (rép : 0.7190)
 - $P(Z < -1.56)$ (rép : 0.0594)
 - $P(Z > 1.47)$ (rép : 0.0708)
 - $P(Z < 1,5)$ (rép : 0,9332)
 - $P(Z < -2,85)$ (rép : 0,0022)
 - $P(Z > 1,8)$ (rép : 0,0359)
 - $P(Z > -2,1)$ (rép : 0,9821)
 - $P(1.14 < Z < 2.23)$ (rép : 0.1142)
 - $P(-1.88 < Z < 0.22)$ (rép : 0.5570)
 - $P(-2.01 < Z < -0.78)$ (rép : 0.1955)
 - $P(0.36 < Z < 1.23)$ (rép : 0.2501)
 - $P(-0.88 < Z < 1.23)$ (rép : 0.7013)
 - $P(-1.78 < Z < -0.3)$ (rép : 0.3446)
22. *** En supposant que $Z \sim N(0,1)$, trouver la valeur de z telle que :
- $P(Z < z) = 0.9949$ (rép : 2.57)
 - $P(Z > z) = 0.5675$ (rép : -0.17)
 - $P(Z < z) = 0.1251$ (rép : -1.15)
 - $P(Z > z) = 0.0010$ (rép : 3.1)
 - z correspond au quantile 2.5% de la normale $N(0; 1)$ (rép : -1.96)
 - z correspond au quantile 25% de la normale $N(0; 1)$ (rép : -0,67)
 - z correspond au quantile 50% de la normale $N(0; 1)$ (rép : 0)
 - z correspond au quantile 75% de la normale $N(0; 1)$ (rép : 0.67)
 - z correspond au quantile 97.5% de la normale $N(0; 1)$ (rép : 1.96)
 - $P(z < Z < 3.4) = 0.7907$ (rép : -0.81)
 - $P(-z < Z < z) = 0.90$ (rép : 1.645)
23. Sachant que la taille des êtres humains suit approximativement une loi normale de moyenne 171 cm et d'écart-type 10 cm, calculer :
- le pourcentage de personne de plus de 178 cm. (Rép : 0.242)
 - le pourcentage de personnes ayant une taille comprise entre 160 et 165 cm. (Rép : 0.1386)

24. *** La durée d'une grossesse chez l'humain suit approximativement une distribution normale de moyenne égale à 266 jours et d'écart-type égal à 16 jours. Déterminez, à l'aide d'une table appropriée :
- Le pourcentage de grossesses de moins de 240 jours (càd 8 mois) (rép : 5.2%).
 - Le pourcentage de grossesses d'une durée comprise entre 240 et 270 jours (càd entre 8 et 9 mois) (rép : 54.7%).
 - La durée minimale des 20% de grossesses les plus longues (rép : 279.5 jours).
25. *** Une usine fabrique en grand nombre des billes dont le diamètre suit une loi normale de moyenne 100mm et d'écart-type 2mm.
- Quelle est la probabilité pour une bille quelconque d'avoir un diamètre compris entre 95 et 105mm ? (rép : 0.9876).
 - Trouvez l'intervalle centré autour de la moyenne du diamètre qui contient 80% de la production. (rép : [97.32 ; 102.68]).
 - Un premier contrôle permet de répartir la population en 2 lots :
 L_1 : ensemble des billes de diamètres dans l'intervalle [95 ; 105]
 L_2 : ensemble des billes restantes.
 Quelle est la probabilité qu'une bille ait son diamètre compris entre 95 et 102
 - Quand elle appartient à L_1 ? (rép : 0.8456).
 - Quand elle appartient à L_2 ? (rép : 0).
26. Les cotes obtenues lors d'un examen de mathématiques sont distribuées normalement avec $\mu = 12$ et $\sigma = 3,5$.
- Quelle est la moyenne des cotes obtenues ? Quelle est sa variance ? (rép : $\mu = 12$, $\sigma^2 = 12,25$)
 - Quelle est la probabilité de réussite de cet examen (cote supérieure ou égale à 10) ? (rép : 0,7157)
 - *** Quelle cote doit être considérée comme cote d'exclusion pour avoir un taux d'échec inférieur à 25% ? (rép : 9,6375)